

Zur Komplexität von Sortierproblemen

W. J. Paul und H.-J. Stoß

Eingegangen am 9. Februar 1973

Summary. We consider a problem of regrouping data collected in blocks of up to r elements by steps involving the data of not more than k blocks each.

The problem consists in giving a lower estimate for the minimum number of steps involved. The estimates are derived from the entropies of certain probability distributions pertinent to the given collections of blocks.

0. Einleitung

In einer vorangehenden Arbeit [6] wurde untersucht, wie viele Schritte wenigstens notwendig sind, um n auf einem linearen Band mit k Lese-Schreib-Köpfen ($k \geq 2$) angeordnete Zeichen gemäß einer vorgegebenen Permutation umzuordnen. Damit wurde u.a. eine Aussage über die zum Umordnen von Daten auf den Bändern einer elektronischen Rechenanlage nötige Mindestzeit erhalten.

Ein ähnliches Problem stellt sich, wenn wir eine Rechenanlage mit großem Hintergrundspeicher als Modell nehmen und das Umspeichern großer Datenmengen ins Auge fassen. Hier ist die gesamte Information in Blöcke beschränkter Umfangs — etwa von höchstens r Daten — zerlegt, und das Umspeichern geschieht so, daß in jedem Schritt jeweils höchstens k Blöcke in den Schnellspeicher geholt und die darin enthaltenen Daten neu zu Blöcken angeordnet werden.

Wir fragen wieder nach der dazu mindestens nötigen Schrittzahl.

Wir gehen bei unseren Überlegungen davon aus, daß in einem Schritt jeweils *alle* aus den gerade zu bearbeitenden höchstens k Blöcken überhaupt bildbaren Blöcke hergestellt und zur eventuellen späteren Weiterbenutzung abgespeichert werden können. Dies wird dadurch gerechtfertigt, daß man, wegen der relativ hohen Zeiten, die für das Herbeiholen von Information aus dem Hintergrundspeicher notwendig sind, einmal geholt Information auch optimal ausnutzen sollte. Ferner bleiben unter diesen Regeln gewonnene untere Abschätzungen für die zum Umordnen nötige Schrittzahl auch noch gültig, wenn wir restriktivere Regeln anwenden und beispielsweise nur zulassen, daß bei einem Schritt die in k Blöcken enthaltenen Daten zu k neuen Blöcken umgeordnet werden, wobei die alten zerstört werden. Für $k = 2$ wurde dieser Spezialfall von Floyd [2] behandelt, und speziell für das Matrix-Transponieren von Hopcroft [3].

Die im folgenden dargestellten Ergebnisse wurden im Anschluß an [6] von beiden Autoren unabhängig voneinander gefunden.

Eine Anwendung der hier benutzten Beweistechniken auf verschiedene Automatenmodelle findet man in [4]. Weiter kann man die Funktion Ψ als Potentialfunktion auffassen und die Algorithmen untersuchen, die in jedem Schritt Ψ maximal ändern. Dies wurde in [5] durchgeführt.

Für wertvolle Anregungen, die insbesondere zur Vereinfachung der Darstellung beigetragen haben, sei Herrn G. Hotz und Herrn C. P. Schnorr gedankt.

1. Problemstellung

Für eine beliebige Menge M und eine natürliche Zahl r sei

$$\text{pot}_r M := \{M' \mid M' \subset M \wedge \# M' \leq r\}.$$

Wir formalisieren die eingangs aufgeworfene Fragestellung auf folgende Weise:

a bezeichne eine endliche Menge, die Menge der Daten.

r, k seien natürliche Zahlen mit $1 \leq r \leq \#a, 2 \leq k$.

$E, F \subset \text{pot}_r a$ interpretieren wir als Blockmengen mit Blöcken zu je höchstens r Daten.

Das Erzeugen neuer Blockmengen aus gegebenen beschreiben wir durch eine Operation \rightarrow :

$$E \rightarrow F: \Leftrightarrow E, F \subset \text{pot}_r a \wedge \bigvee_{B \in \text{pot}_k E} F \subset E \cup \text{pot}_r \cup B.$$

Wir erweitern \rightarrow iterativ zu \xrightarrow{t} ($t \in \mathbb{N}$) durch

$$E \xrightarrow{0} F: \Leftrightarrow F \subset E$$

$$E \xrightarrow{t+1} F: \Leftrightarrow \bigvee_{G \subset \text{pot}_r a} E \xrightarrow{t} G \wedge G \rightarrow F.$$

Gilt für ein $t \in \mathbb{N}$ $E \xrightarrow{t} F$, so existiert eine Folge $\{E_\tau\}_0^t$, für die

$$E = E_0 \rightarrow E_1 \rightarrow \dots \rightarrow E_t = F$$

gilt. Eine solche Folge nennen wir „ E -Ableitung von F “ und sagen F ist aus E „ableitbar“.

Offensichtlich gilt:

$$F \text{ aus } E \text{ ableitbar} \Leftrightarrow \bigcup E \supset \bigcup F.$$

Ist F aus E ableitbar, so setzen wir

$$L(E, F) := \min\{t \mid E \xrightarrow{t} F\}.$$

Interpretieren wir das Ausführen von \rightarrow als einen Schritt, so ist also $L(E, F)$ die minimale Schrittzahl, in der F aus E abgeleitet werden kann.

Damit lautet unser

Problem. Gegeben seien $E, F \subset \text{pot}_r a$ mit $\bigcup E \supset \bigcup F$. Gesucht ist eine nicht-triviale untere Schranke für $L(E, F)$.

2. Eigenschaften von L

Definition. Es seien $E, E' \subset \text{pot}_r a$. Es bezeichne

$$(1) \bigwedge_{e'_1, e'_2 \in E'} e'_1 \neq e'_2 \Rightarrow e'_1 \cap e'_2 = \emptyset.$$

$$(2) \bigwedge_{e' \in E'} \bigvee_{e \in E} e' \subset e.$$

$$(3) \bigcup E' = \bigcup E.$$

Dann heißt

E' „zerlegt“ : \Leftrightarrow (1).

E' „zerlegt in E'' “ : \Leftrightarrow (1) \wedge (2).

E' „Zerlegung von E'' “ : \Leftrightarrow (1) \wedge (2) \wedge (3).

$P(E)$ bezeichne die Menge der Zerlegungen von E .

Satz 1. Für $E, F, G \subset \text{pot}, a$ mit $\bigcup E \supset \bigcup F \supset \bigcup G$ gelten:

(1) $L(E, F) \geq 0, = 0 \Leftrightarrow F \subset E$.

(2) $L(E, G) \leq L(E, F) + L(F, G)$

und speziell falls $F \rightarrow G$:

(3) $L(E, G) \leq L(E, F) + 1$.

(4) $L(E, F) \geq \max_{F' \in P(F)} \min_{E' \in P(E)} L(E', F')$.

Die einfachen Beweise von (1)–(3) seien übergangen. Zum Beweis von (4) zeigen wir zunächst

Lemma 2. Es sei $t \in \mathbb{N}$, $E, F \subset \text{pot}, a$ mit $E \xrightarrow{t} F$. Dann gilt:

$$\bigwedge_{F' \in P(F)} \bigvee_{E' \in P(E)} E' \xrightarrow{t} F'$$

Beweis durch Induktion:

1. $t=1$: Wir konstruieren zu gegebenem $F' \in P(F)$ ein passendes $E' \in P(E)$.

Wegen $E \rightarrow F$ gilt:

$$\bigvee_{B \in \text{pot}_k E} F \subset E \cup \text{pot}, \bigcup B.$$

Wir setzen:

$$F'_1 := \{f' \in F' \mid f' \subset \bigcup B\},$$

$$F'_2 := F' \setminus F'_1.$$

\bar{B} sei eine Zerlegung von B mit höchstens k Elementen. Wir setzen

$$B' := \{\bar{b} \cap \bigcup F'_1 \mid \bar{b} \in \bar{B}\}.$$

Dann ist B' zerlegt in B und $\bigcup B' = \bigcup F_1$.

Wir zeigen:

i) $B' \cup F'_2$ ist zerlegt: B' und F'_2 sind jeweils zerlegt. Für $b' \in B', f' \in F'_2$ gilt aber

$$b' \cap f' \subset \bigcup B' \cap \bigcup F'_2 = \bigcup F'_1 \cap \bigcup F'_2 = \emptyset,$$

da F' zerlegt.

ii) $B' \cup F'_2$ ist zerlegt in E : B' ist zerlegt in B , also auch in E . Für $f' \in F'_2$ existiert ein $f \in F$ mit $f' \subset f$. Da $f' \not\subset \bigcup B$ ist auch $f \not\subset \bigcup B$ und somit $f \notin \text{pot}, \bigcup B$. Dann ist aber $f \in E$, also $f' \subset f \in E$.

iii) $B' \cup F'_2 \rightarrow F'$: Wegen $F' = F'_1 \cup F'_2$ genügt es $F'_1 \subset \text{pot}, \bigcup B'$ zu zeigen. Dies ist aber wegen $\bigcup F_1 = \bigcup B'$ klar.

Ergänzen wir also $B' \cup F'_2$ durch Hinzunehmen weiterer Blöcke zu einer Zerlegung E' von E , so gilt mit diesem E' die Behauptung.

2. $t \Rightarrow t+1$: Nach Definition gilt

$$E \xrightarrow{t+1} F \Leftrightarrow \bigvee_G E \xrightarrow{t} G \wedge G \rightarrow F.$$

Nach dem eben Gezeigten gilt $\bigwedge_{F' \in P(F)} \bigvee_{G' \in P(G)} G' \rightarrow F'$, nach Induktionsannahme $\bigvee_{E' \in P(E)} E' \xrightarrow{t} G'$, woraus zusammen $E' \xrightarrow{t+1} F'$ folgt.

3. Für den Fall $t=0$ gilt die Behauptung trivialerweise.

Mit Lemma 2 können wir nun (4) von Satz 1 beweisen: Denn ist $L(E, F) = t$, so gilt $E \xrightarrow{t} F$ und somit nach Lemma 2:

$$\bigwedge_{F' \in P(F)} \bigvee_{E' \in P(E)} E' \xrightarrow{t} F'.$$

Also gilt $\bigwedge_{F' \in P(F)} \bigvee_{E' \in P(E)} L(E', F') \leq t = L(E, F)$, woraus unmittelbar die Behauptung folgt.

3. Eine untere Schranke für L

Satz 3. Ψ sei eine für alle $E, F \subset \text{pot}, a$ mit $\cup E > \cup F$ definierte reellwertige Funktion mit

- 1) $\Psi(E, F) \leq 0$ falls $F \subset E$.
- 2) $\Psi(E, G) \leq \Psi(E, F) + 1$ falls $\cup E > \cup F > \cup G, F \leftarrow G$.

Dann gilt für alle E, F :

$$\Psi(E, F) \leq L(E, F).$$

Beweis. Sei $L(E, F) = t$.

- 1) $t=0$: $L(E, F) = 0 \Rightarrow F \subset E \Rightarrow \Psi(E, F) \leq 0$.
- 2) $t > 0$: Dann existiert eine E -Ableitung $\{E_\tau\}_0^t$ von F .

Hierfür gilt

$$\begin{aligned} \Psi(E, F) &= \Psi(E_0, E_t) \leq \Psi(E_0, E_t) - \Psi(E_0, E_0) \\ &= \sum_{\tau=1}^t (\Psi(E_0, E_\tau) - \Psi(E_0, E_{\tau-1})) \\ &\leq \sum_{\tau=1}^t 1 = t = L(E, F). \end{aligned}$$

Damit haben wir das Problem, eine untere Schranke für L zu finden, darauf reduziert, eine Funktion Ψ zu finden, die den Bedingungen von Satz 3 genügt.

Wir konstruieren nun eine solche Funktion Ψ .

Sind E, F zwei zerlegte Blockmengen, so liefern die Anzahlen $\#(e \cap f)$ ($e \in E, f \in F$) einen ersten Anhaltspunkt für die zur Ableitung von F aus E nötige Schrittzahl; denn aus diesen Zahlen können wir ablesen, wie viele Blöcke aus E wenigstens kombiniert werden müssen, um einen Block $f \in F$ zu erhalten. Wir beachten:

Ist E zerlegt, so haben für jedes $f \in F$ mit $f \neq \emptyset$ die Tupel

$$W(E, f) = \left(\frac{\#e \cap f}{\#f} \mid e \in E \right)$$

die Eigenschaften einer diskreten bedingten Wahrscheinlichkeitsverteilung. Die gesuchte Funktion Ψ werden wir aus der Entropie solcher Verteilungen gewinnen.

Mit der konvexen Funktion

$$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x \lg x & x > 0 \end{cases}$$

ist die Entropie einer solchen Verteilung definiert als

$$\begin{aligned} H(E, f) &:= - \sum_{e \in E} \varphi\left(\frac{\#e \cap f}{\#f}\right) \\ &= \frac{1}{\#f} \left(\varphi(\#f) - \sum_{e \in E} \varphi(\#e \cap f) \right). \end{aligned}$$

Für zerlegte E, F setzen wir

$$\begin{aligned} \Phi(E, F) &:= \sum_{f \in F} (\#f) H(E, f) \\ &= \sum_{f \in F} \varphi(\#f) - \sum_{f \in F} \sum_{e \in E} \varphi(\#e \cap f). \end{aligned}$$

$\Phi(E, F)$ ist bis auf Normierung eine bedingte Entropie. Wir setzen

$$\Psi(E, F) := \frac{1}{r k \lg k} \max_{F' \in \mathcal{P}(F)} \min_{E' \in \mathcal{P}(E)} \Phi(E', F')$$

und zeigen

Satz 4. Ψ erfüllt die Bedingungen von Satz 3. Es gilt also für alle $E, F \subset \text{pot } a$ mit $\cup E > \cup F$

$$L(E, F) \geq \Psi(E, F).$$

Wir benutzen folgende einfache Hilfsmittel aus der Informationstheorie:

Lemma 5. 1) Für $x_1, \dots, x_n \geq 0$ gilt $\sum_{v=1}^n \varphi(x_v) \leq \varphi\left(\sum_{v=1}^n x_v\right)$.

2) Für $x_1, \dots, x_n \geq 0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0$ mit $\sum_{v=1}^n \alpha_v = 1$ gilt

$$\varphi\left(\sum_{v=1}^n \alpha_v x_v\right) \leq \sum_{v=1}^n \alpha_v \varphi(x_v) \quad (\text{Jensensche Ungleichung}).$$

3) Ist $E \subset \text{pot } a$, zerlegt, $f \in \text{pot } a$, so ist

$$\lg \#E \geq H(E, f) \geq 0, = 0 \Leftrightarrow \bigvee_{e \in E} f \subset e.$$

4) Sind $E, G \subset \text{pot } a$, zerlegt, $f \in \text{pot } a$ mit $f \subset \cup G \subset \cup E$ und bezeichnet $H((E, G), f)$ die Entropie der Verteilung

$$W((E, G), f) := \left(\frac{\#e \cap g \cap f}{\#f} \mid e \in E, g \in G \right),$$

so gilt

$$H((E, G), f) \leq H(E, f) + H(G, f).$$

Die Beweise findet man etwa bei Feinstein [1] im 2. Kapitel.

Hiermit erhalten wir als Eigenschaft von Φ :

Lemma 6. Es seien $E, F, G \subset \text{pot}, a$ zerlegt. Dann gelten

- 1) $\Phi(E, F) \geq 0, = 0 \Leftrightarrow F \in P(E)$,
- 2) $\Phi(E, G) \leq \Phi(E, F) + \Phi(F, G)$ für $\cup E \supset \cup F \supset \cup G$,
- 3) $\Phi(E, F) \leq rk \lg k$ für $E \rightarrow F$,
- 4) $\Phi(E, F) = \max_{F' \in P(F)} \min_{E' \in P(E)} \Phi(E', F')$.

Beweis: 1) folgt unmittelbar aus 3) von Lemma 5.

2) Sei zunächst $\cup F = \cup G$ angenommen.

Dann gilt – einfache Umformungen sind weggelassen –

$$\begin{aligned} \Phi(E, F) + \Phi(F, G) &= \Phi(E, F) + \Phi(G, F) + \sum_G \varphi(\#g) - \sum_F \varphi(\#f) \\ &\geq \Phi((E, G), F) + \sum_F \varphi(\#g) - \sum_G \varphi(\#f) \quad (\text{nach 4) Lemma 5}) \\ &= \sum_G (\varphi(\#g) - \sum_E \sum_F \varphi(\#e \cap f \cap g)) \\ &= \Phi((E, F), G) \\ &\geq \Phi(E, G) \quad (\text{nach 1) Lemma 5}). \end{aligned}$$

Ist $\cup F \not\supseteq \cup G$, so setzen wir

$$F_1 := \{f \cap \cup G \mid f \in F\}, \quad F_2 := \{f \setminus \cup G \mid f \in F\}.$$

Dann gilt $\cup F_1 = \cup G$ und die Ungleichung gilt mit F_1 statt F . Nun ist nach Konstruktion

$$\Phi(F, G) = \Phi(F_1, G) \quad \text{und} \quad \Phi(E, F_1) \leq \Phi(E, F_1) + \Phi(E, F_2) = \Phi(E, F_1 \cup F_2)$$

und nach der Jensenschen Ungleichung $\Phi(E, F_1 \cup F_2) \leq \Phi(E, F)$. Damit gilt 2) auch für $\cup F \supset \cup G$.

$$3) E \rightarrow F \Rightarrow \bigvee_{B \in \text{pot}_k E} F \subset E \cup \text{pot}_r \cup B.$$

Nach Lemma 5, 3) ist $\Phi(E, F) = \Phi(E, F \setminus E)$. Nun ist $F \setminus E \subset \text{pot}_r \cup B$ und somit $e \cap f = \emptyset$ für $e \in E \setminus B, f \in F \setminus E$. Also ist

$$\Phi(E, F) = \Phi(B, F \setminus E) = \sum_{f \in F \setminus E} (\#f) H(B, f).$$

Nach Lemma 5, 3) ist $H(B, f) \leq \lg \#B \leq \lg k$, ferner wegen

$$\cup (F \setminus E) \subset \cup B: \sum_{f \in F \setminus E} \#f \leq rk,$$

da B aus höchstens k Blöcken zu je höchstens r Elementen besteht. Damit ist

$$\Phi(E, F) \leq rk \lg k.$$

4) Ist E zerlegt und $E' \in P(E)$, so besteht E' aus Zerlegungen der einzelnen Elemente von E , d.h.

$$E' = \dot{\cup}_{e \in E} E'_e,$$

wobei E'_e Zerlegung von e . Damit folgt aus Lemma 5, 1):

$$\Phi(E', F) \geq \Phi(E, F)$$

und aus der Jensenschen Ungleichung für $F' \in P(F)$:

$$\Phi(E, F') \leq \Phi(E, F).$$

Also ist für jedes $F' \in P(F)$

$$\min_{E' \in P(E)} \Phi(E', F') = \Phi(E, F')$$

und somit nach der zweiten Ungleichung

$$\max_{F' \in P(F)} \min_{E' \in P(E)} \Phi(E', F') = \Phi(E, F).$$

Diese Eigenschaften von Φ übertragen sich sämtlich auf Ψ . Wir haben also

Lemma 7. Es seien $E, F, G \subset \text{pot}, a$. Dann gelten

- 1) $\Psi(E, F) \geq 0, = 0 \Leftrightarrow \bigwedge_{f \in F} \bigvee_{e \in E} f \subset e$.
- 2) $\Psi(E, G) \leq \Psi(E, F) + \Psi(F, G)$ falls $\cup E \supset \cup F \supset \cup G$.
- 3) $\Psi(E, F) \leq 1$ für $E \rightarrow F$.
- 4) $\Psi(E, F) = \frac{1}{rk \lg k} \Phi(E, F)$ falls E, F zerlegt.
- 5) $\Psi(E, F) \geq \max_{F' \in P(F)} \min_{E' \in P(E)} \Psi(E', F')$.

Ψ erfüllt also insbesondere die Bedingungen von Satz 3, womit die Abschätzung von Satz 4 bewiesen ist. Darüber hinaus zeigt Lemma 7, daß Ψ — mit einer kleinen Einschränkung bei 1) — alle in Satz 1 aufgeführten Eigenschaften von L besitzt.

4. Praktischer Bezug und Ausblick

Wir untersuchen den Aufwand beim Transponieren einer $n \times n$ Matrix.

Es sei $q \geq 1, p \geq 1, k \geq 2, r = k^q, n = p \cdot r$.

Wir setzen $a = \{0, 1, \dots, n^2 - 1\}$,

$$E = \{e_{\nu\mu} \mid 0 \leq \nu < n, 0 \leq \mu < p\}$$

$$F = \{f_{\nu\mu} \mid 0 \leq \nu < n, 0 \leq \mu < p\}$$

mit

$$e_{\nu\mu} = \{\nu n + \mu r + \varrho \mid 0 \leq \varrho < r\}$$

$$f_{\nu\mu} = \{(\mu r + \varrho)n + \nu \mid 0 \leq \varrho < r\}.$$

Die Elemente von $\bigcup_{\mu} e_{\nu\mu}$ bilden die ν -te Zeile, die von $\bigcup_{\mu} f_{\nu\mu}$ die ν -te Spalte.

Da eine Zeile und eine Spalte nur ein Element gemeinsam haben, gilt $\#e \cap f \leq 1$ für je zwei Mengen $e \in E$ und $f \in F$. E und F sind zerlegt. Damit ist wegen $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$

$$\begin{aligned} \Phi(E, F) &= \sum_{f \in F} \varphi(\#f) - \sum_{f \in F} \sum_{e \in E} \varphi(\#e \cap f) \\ &= \sum_{f \in F} \varphi(\#f) = \sum_{f \in F} \varphi(r) \\ &= n p r \lg r = n^2 \lg r. \end{aligned}$$

Also gilt nach Lemma 7,4) und Satz 4

$$L(E, F) \geq \frac{1}{rk \lg k} \Phi(E, F) = \frac{n^2 \lg r}{rk \lg k} = \frac{n^2}{rk} \lg_k r,$$

d.h. das Transponieren einer Matrix unter den genannten Bedingungen kostet wenigstens $\frac{n^2}{rk} \lg_k r$ viele Schritte. Der von Floyd [2] angegebene Algorithmus – geringfügig vom Fall $k=2$ auf beliebige $k \geq 2$ verallgemeinert – liefert für dieses Problem $L(E, F) \leq \frac{n^2}{rk} \lg_k r$, wenn man berücksichtigt, daß je k -Schritte Floydscher Zählung in einem der hier gezählten Schritte zusammengefaßt sind.

Das Transponieren einer $n \times n$ -Matrix kostet also unter den oben genannten Bedingungen genau

$$L(E, F) = \frac{n^2 \lg r}{rk \lg k}$$

viele Schritte.

Damit haben wir auch gezeigt

Satz 8. Es gibt (nichttriviale) Umordnungsaufgaben, für die die in Satz 4 gegebene Abschätzung optimal ist.

In dem eben betrachteten Fall waren E und F zerlegt. Ersetzen wir nun E durch

$$\tilde{E} = \{e_0, e_1, \dots, e_{n-1}\}$$

mit

$$e_\nu = \{\nu + \varrho \mid 0 \leq \varrho < r\},$$

wobei wir modulo n^2 rechnen, so haben wir die Ausgangsmenge erheblich vergrößert und \tilde{E} ist nicht mehr zerlegt. Da aber für jede Zerlegung E' von \tilde{E} gilt

$$e' \in E', \quad f \in F \Rightarrow \#e' \cap f \leq 1,$$

können wir die obige Abschätzung wiederholen und erhalten wieder

$$L(\tilde{E}, F) \geq \frac{n^2 \lg r}{rk \lg k}.$$

Dieses Vergrößern der Ausgangsmenge kann also das Umordnen nicht beschleunigen.

Als Beispiel seien zwei Fälle genannt, in denen in der Praxis die Transposition großer Matrizen nötig ist:

- i) Multiplikation von Matrizen.
- ii) Numerische Lösung von partiellen Differentialgleichungen im \mathbb{R}_n .

Bei der Diskretisierung wird der Definitionsbereich gerastert und das Raster bei manchen iterativen Lösungsverfahren abwechselnd in x - und y -Richtung durchlaufen. Für jede Iteration ist hierbei die Transposition der Ergebnismatrix nötig.

Bei praktisch vorkommenden Aufgaben sind diese Matrizen teilweise so groß, daß sie auf Band gespeichert werden müssen und ihre Transposition mit herkömmlichen $O(n^2)$ -Verfahren für Stunden (!) die Kanäle blockiert. Bei Verwen-

dung des in [2] bzw. [5] beschriebenen $O(n \log n)$ -Verfahrens würden diese Zeiten auf die Größenordnung von höchstens Minuten absinken.

Durch die vorliegende Arbeit ist gesichert, daß kein praktisch noch so ausgefeiltes Verfahren schneller als das zitierte Verfahren läuft, sofern es nicht in Abhängigkeit von den Werten der Matrixelemente arbeitet. Durch die Voraussetzung, daß alle Matrixelemente verschieden sind haben wir nämlich erzwungen, daß außer den Diagonalelementen tatsächlich alle Elemente umgestellt werden müssen. Im Falle etwa von binären Matrizen muß das nicht der Fall sein, was man eventuell durch geschickte Abfragen ausnutzen könnte. Hieraus ergibt sich die folgende (offene) Frage:

Ist es möglich, *binäre* $n \times n$ -Matrizen schneller als in $O(n \log n)$ -Schritten zu transponieren?

Literatur

1. Feinstein, A.: Foundations of Information Theory. New York: McGraw-Hill 1958
2. Floyd, R. W.: Permuting information in idealized two-level storage. In: Miller, R. E., Thatcher, J. W. (ed.): Complexity of computer computations. New York-London: Plenum Press 1972, pp. 105—109
3. Hopcroft, J.: Vorlesung. Cornell University, Ithaka (N.Y.), 1971
4. Paul, W. J.: Über die Zeit, die benötigt wird, um endliche Mengen umzuordnen. Gesellschaft für Informatik, 1. Fachtagung über Automatentheorie und Formale Sprachen. Bonn, 9.—12. Juli 1972. Lecture Notes in Computer Science 2. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1973, S. 249—253
5. Paul, W. J.: Optimales Transponieren quadratischer Matrizen. Gesellschaft für Informatik, 3. Jahrestagung. Hamburg, 8.—10. Oktober 1973. Lecture Notes in Computer Science 1. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1973, S. 72—80
6. Stoss, H. J.: Rangierkomplexität von Permutationen. Acta Informatica 2, 80—96 (1973)

Dr. W. J. Paul
 Fachbereich Angewandte
 Mathematik und Informatik
 der Universität des Saarlandes
 D-6600 Saarbrücken
 Bundesrepublik Deutschland

Prof. Dr. H.-J. Stoß
 Universität Konstanz
 Fachbereich Mathematik
 D-7750 Konstanz
 Universitätsstr. 10
 Bundesrepublik Deutschland