Universität des Saarlandes
FR 6.2 - Informatik
Prof. Dr. W.J. Paul
Dipl.-Ing. Christoph Baumann

Theoretische Informatik
8. Übungsblatt
(Abgabe: 09.01.2013)

Aufgabe 1: (Mehrband-TM) **(10 Punkte)**

In der Vorlesung wurden k-Band-Turingmaschinen eingeführt, die über k Bänder und k Lese-/Schreibköpfe verfügen. Die Definitionen der Maschinen unterscheiden sich nur in der Übergangsfunktion δ, die nun folgenden Typ hat.

$$\delta : Z \times A^k \to Z \times A^k \times \{L, N, R\}^k$$

Für $\delta(z, a_1, \ldots, a_k) = (z', c_1, \ldots, c_k, s_1, \ldots, s_k)$ und alle $i \leq k$ geschieht in einem Schritt folgendes:

- Auf Band i wird a_i gelesen.
- Auf Band i wird c_i gedruckt.
- Auf Band i wird Kopfbewegung s_i ausgeführt.

Gib eine formale Definition der Konfigurationen und Rechnungen von k-Band-Turingmaschinen an! Was wäre eine geeignete Akzeptanzbedingung, d.h. wann hält die Maschine und akzeptiert?

Aufgabe 2: (Smn-Theorem) **(10 Punkte)**

Das s_n^m-Theorem besagt grob, dass man für jedes Programm w mit Eingaben x und y ein Programm w_x finden kann, welches für Eingabe y das gleiche Ergebnis liefert wie w für x und y. Die nötige Programmtransformation wird durch die Funktion s_n^m durchgeführt. Formal:

> *Sei w die Gödelisierung einer Turingmaschine, welche die Funktion $\varphi_w : \mathbb{N}_0^{m+n} \to \mathbb{N}_0$ berechnet. Dann existiert eine totale, berechenbare Funktion $s_n^m : \mathbb{B}^* \times \mathbb{N}_0^m \to \mathbb{B}^*$, so dass für alle $x \in \mathbb{N}_0^m$, $y \in \mathbb{N}_0^n$ gilt:*
>
> $$\varphi_{s_n^m(w, x_1, \ldots, x_m)}(y_1, \ldots, y_n) = \varphi_w(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$$

Gib einen Beweis für das Theorem an!

Aufgabe 3: (Entscheidbarkeit) **(2+2+2+2+2 Punkte)**

Bestimme den Wahrheitsgehalt jeder der folgenden Implikationen! L und L' beschreiben hier immer Sprachen über Alphabet $\{0, 1, \#\}$. Begründe deine Antworten!

a) L entscheidbar und L nicht r.e. $\Longrightarrow$ L regulär

b) $L \leq L'$ und L' r.e. $\Longrightarrow$ L r.e.

c) $L \leq L'$ und L nicht r.e. $\Longrightarrow$ L' nicht r.e.

d) L kontextfrei $\Longrightarrow$ L r.e.

e) $L = \{u \in \{0, 1\}^* \mid L(M_u) \text{ ist kontextfrei}\} \Longrightarrow L$ ist entscheidbar

Aufgabe 4: (Satz von Rice) **(10 Punkte)**

Sei $R = \{\varphi_u \mid u \in \mathbb{B}^*\}$ die Menge aller Turing-berechenbaren Funktionen und $S \subseteq R$ eine Teilmenge davon. $C(S) = \{u \mid \varphi_u \in S\}$ bezeichnet die Menge aller Programme, die Funktionen aus S berechnen. Der Satz von Rice besagt nun, dass $C(S)$ nur für triviale S entscheidbar ist.

$$C(S) \text{ entscheidbar} \iff S = \emptyset \vee S = R$$

In der Vorlesung wurde Richtung $\Rightarrow$ bewiesen für den Fall $\Omega \in S$, wobei $\Omega \in R$, die berechenbare Funktion beschreibt, welche überall nicht definiert ist. Zeige für $\Omega \notin S$:

$$C(S) \text{ entscheidbar} \Rightarrow S = \emptyset \vee S = R$$