Universität des Saarlandes
FR 6.2 - Informatik
Prof. Dr. W.J. Paul
Dipl.-Ing. Christoph Baumann

Theoretische Informatik
6. Übungsblatt
(Abgabe: 12.12.2012)

Aufgabe 1: (Primitiv Rekursive Funktionen) **(3+3+3+3+3 Punkte)**

Zeige, dass die folgenden Funktionen primitiv rekursiv (PR) sind! Führe dazu die Funktionen mit Hilfe des Kompositions- und des primitiven Rekursionsschemas aus der Definition der PR Funktionen auf bereits bekannte primitiv rekursive Funktionen zurück!

a) Vorgängerfunktion $V : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, die jeder natürlichen Zahl (außer Null) ihren Vorgänger zuordnet

b) Die beschränkte Summenfunktion $S : \mathbb{N}_0^{r+1} \to \mathbb{N}_0$ für eine PR Funktion $g : \mathbb{N}_0^{r+1} \to \mathbb{N}_0$, das heißt $S(x_1, \ldots, x_r, m) = \sum_{i=0}^{m} g(x_1, \ldots, x_r, i)$.

c) Die Maximumsfunktion $max(n, m)$, die die größere der beiden natürlichen Zahlen n und m zurückgibt, bzw. n (oder m) wenn diese gleich sind.

d) Die Funktion $kgv(n, m)$, die das kleinste gemeinsame Vielfache der natürlichen Zahlen n und m zurückgibt, bzw. Null, wenn eine der Zahlen gleich Null ist.

e) Die Funktion $ggt(n, m)$, die den größten gemeinsamen Teiler der natürlichen Zahlen n und m berechnet.

Aufgabe 2: (Konstante Funktionen) **(10 Punkte)**

In der Vorlesung wurden die r-stelligen konstanten Funktionen $c_s^r : \mathbb{N}_0^r \to \mathbb{N}_0$ mit $c_s^r(x_1, \ldots, x_r) = s$ als initiale primitiv rekursive Funktionen eingeführt, tatsächlich kommt man aber mit weniger aus. Man benötigt zur Definition der primitiv rekursiven Funktionen neben Nachfolgerfunktion, den Projektionsfunktionen, dem Kompositions- und primitiven Rekursionsschema lediglich die 0-stellige Nullfunktion $z : \mathbb{N}_0^0 \to \mathbb{N}_0$, die durch $z() = 0$ gegeben ist. Zeige auf dieser Basis, dass die r-stelligen konstanten Funktionen c_s^r primitiv rekursive Funktionen sind!

Aufgabe 3: (Diagonalisierung) **(5 Punkte)**

Beweise, dass $2^{\mathbb{N}_0}$, die Potenzmenge der natürlichen Zahlen, überabzählbar ist! Dies bedeutet, es existiert keine Bijektion $f : \mathbb{N}_0 \to 2^{\mathbb{N}_0}$, so dass $2^{\mathbb{N}_0}$ als Menge $\{S_0, S_1, S_2, \ldots\}$ von Elementen $S_i = f(i)$ aufgezählt werden kann.

Aufgabe 4: (Programmieren von Turing-Maschinen) **(5+5 Punkte)**

Seien $a \in \mathbb{B}^+$, $b \in \{0, 1, \#\}^+$ und $x = a\#b$ die Bandinschrift auf dem Eingabeband einer k-Band-Turing-Maschine. Gib jeweils eine k-Band-Turing-Maschine an, die die Funktion $head(x) = a$, bzw. $tail(x) = b$ berechnet und das Ergebnis auf Band 1 schreibt! Die Rechnung soll regulär sein, das heißt, wenn die Maschine hält, soll der Lesekopf am Beginn des Ergebnisses auf Band 1 stehen und alle anderen Bänder seien leer. Es dürfen alle in der Vorlesung implementierten Hilfsprogramme verwendet werden.