Universität des Saarlandes
FR 6.2 - Informatik
Prof. Dr. W.J. Paul
Dipl.-Ing. Christoph Baumann

Theoretische Informatik
5. Übungsblatt
(Abgabe: 28.11.2012)

Organisatorischer Hinweis: Dies ist das letzte Übungsblatt vor der Zwischenklausur am 8.12.2012. Für die Klausurzulassung ist das Erreichen von 100 Punkten und das Vortragen einer Lösung in der Übungsgruppe notwendig.

Aufgabe 1: (Chomsky-Normalform) (10 Punkte)

In der Vorlesung wurde gezeigt, wie jede beliebige kontextfreie Grammatik in die Chomsky-Normalform (CNF) überführt werden kann, so dass $P \subseteq N \times (T \cup N^2) \cup \{(S, \varepsilon)\}$. Nach der Eliminierung aller ε-Produktionen außer ggf. $S \longrightarrow \varepsilon$ erhielten wir die Grammatik $G_1 = (T_1, N_1, P_1, S_1)$. Im zweiten Schritt wurden dann gemischte Terminal- und Nichtterminalproduktionen entfernt. Dabei wurde Grammatik G_1 wie folgt in die Grammatik $G_2 = (T_2, N_2, P_2, S_2)$ umgewandelt.

- Es gilt $T_2 = T_1$ und $S_2 = S_1$. Außerdem $N_1 \subseteq N_2$ und alle Produktionen $n \longrightarrow \beta$, mit $\beta \in N^*$, sind ebenfalls in P_2.
- Für jede Produktion der Form

$$n \to \alpha_0 t_1 \alpha_1 t_2 \alpha_2 \cdots t_m \alpha_m$$

  mit $\alpha_j \in N_1^*$ und $t_i \in T_1$ für alle $j \leq m, i \in [1:m]$, $m \in \mathbb{N}$:

  - führen wir zusätzliche Nichtterminal $\{n_{t_1}, \ldots, n_{t_m}\} \subseteq N_2$ ein,
  - erweitern wir P_1 für jedes $i \in [1:m]$ um die Regel $n_{t_i} \longrightarrow t_i \in P_2$,
  - ersetzen wir die ursprüngliche Regel $n \to \alpha_0 t_1 \alpha_1 t_2 \alpha_2 \cdots t_m \alpha_m \notin P_2$ durch

$$n \to \alpha_0 n_{t_1} \alpha_1 n_{t_2} \alpha_2 \cdots n_{t_m} \alpha_m \in P_2.$$

Beweise, dass diese Transformation die erzeugte Sprache nicht verändert, d.h. $L(G_2) = L(G_1)$!

Aufgabe 2: (Parsen von Kontextfreien Sprachen) (5+5+5 Punkte)

Der in der Vorlesung vorgestellte Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus (CYK), löst das Wortproblem für kontextfreie Sprachen in Zeit $O(n^3)$. Voraussetzung ist das eine Grammatik für die Sprache in CNF vorliegt.

a) Gib für die folgende Sprache eine kontextfreie Grammatik an!

$$L = \{uawb \mid u, w \in \{a,b\}^*,\ |u| = |w|\}$$

b) Überführe die Grammatik wenn nötig in Chomsky-Normalform!

c) Wende den CYK-Algorithmus für das Wort $ababab \in L$ an! Stelle dafür die $S_{i,j}$ auf und gib für jedes gefundene Nichtterminal n die verwendete Produktionsregel $n \longrightarrow n_1 n_2$ und den den entsprechenden Wert k an, so dass $n_1 \in S_{i,k-1}$ und $n_2 \in S_{k,j}$! Konstruiere mit Hilfe der $S_{i,j}$ den Ableitungsbaum!

Aufgabe 3: (Starkes Pumping-Lemma) **(7 Punkte)**

Beweise das sogenannte *starke* Pumping-Lemma für reguläre Sprachen:

> *Wenn L eine reguläre Sprache ist, dann gilt für sie folgende starke "Pumping-Eigenschaft": Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$, so dass für jedes Wort $uvw \in L$ mit $|v| = n$ es eine Unterteilung $v = xyz$ mit $|y| > 0$ gibt, so dass $uxy^izw \in L$ für jedes $i \in \mathbb{N}_0$.*

Aufgabe 4: (Primitiv Rekursive Funktionen) **(4+4 Punkte)**

Zeige, dass die Mulitplikation $n \cdot x$ und das Potenzieren x^n mit natürlichen Zahlen $n, x \in \mathbb{N}_0$ primitiv rekursive Funktionen sind! Es gelte dabei die Konvention $0^0 = 1$.