



Organisatorischer Hinweis: Dies ist das vorletzte Übungsblatt vor der Zwischenklausur am 8.12.2012. Für die Klausurzulassung ist das Erreichen von 100 Punkten und das Vortragen einer Lösung in der Übungsgruppe notwendig.

Aufgabe 1: (Pushdown Lemma) (8 Punkte)

Sei $M = (\Sigma, \Gamma, Z, \delta, z_s, Z_a)$ ein nichtdeterministischer Pushdown-Automat und $p, r \in Z$, $x, y \in \Sigma^*$ sowie $A, B \in \Gamma^*$. Beweise durch vollständige Induktion über $k \in \mathbb{N}_0$:

$$\forall p, r, x, y, A, B, k. \quad (p, x, A) \vdash_M^k (r, \varepsilon, \varepsilon) \implies (p, xy, AB) \vdash_M^k (r, y, B)$$

Aufgabe 2: (Charakterisierung der Pushdown-Automaten) (3+3 Punkte)

Um zu zeigen, dass die von Pushdown-Automaten erkannten Sprachen kontextfrei sind, wurde in Konstruktion II der Vorlesung eine Grammatik $G = (T, N, P, S)$ eingeführt, die alle akzeptierten Eingaben eines Pushdown-Automaten M produziert. Dazu wurde folgendes Lemma für alle Fälle der Konstruktion bis auf (2') und (3') bewiesen.

Sei B ein Ableitungsbaum der Tiefe t für Ableitung $\langle q, A, p \rangle \xrightarrow*_G x \in T^*$, dann gilt:

$$(q, x, A) \vdash_M^* (p, \varepsilon, \varepsilon)$$

Vervollständige im Beweis den Induktionsschritt $t - 1 \rightarrow t$ für die Fälle (2') und (3')!

Aufgabe 3: (Unendliche Vereinigung Regulärer Sprachen) (7 Punkte)

Zeige oder widerlege: Seien L_0, L_1, L_2, \dots beliebige reguläre Sprachen mit $L_n \subseteq L_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $L = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L_n$ ebenfalls regulär.

Aufgabe 4: (Kontextfreie Grammatiken) (3+3+3 Punkte)

Gib jeweils eine kontextfreie Grammatik an, die die folgenden Sprachen erzeugt!

$$\text{a) } \{w c w^R \mid w \in \{a, b\}^*\} \quad \text{b) } \{w w^R \mid w \in \{a, b\}^*\} \quad \text{c) } \{w \in \{a, b\}^* \mid w = w^R\}$$

Hinweis: w^R bezeichnet die Umkehrung von w . Für $w = w_1 \cdots w_n$ haben wir $w^R = w_n \cdots w_1$.

Aufgabe 5: (Pushdown-Automaten) (5+5 Punkte)

Konstruiere jeweils einen Pushdown-Automaten, der die folgenden Sprachen erkennt!

- a) $\{a^m b^n \mid m \leq n \leq 2m\}$
- b) $\{w \in \{a, b\}^* \mid w = w^R\}$