Universität des Saarlandes
FR 6.2 - Informatik
Prof. Dr. W.J. Paul
Dipl.-Ing. Christoph Baumann

Theoretische Informatik
10. Übungsblatt
(Abgabe: 23.01.2013)

Aufgabe 1: (Unentscheidbarkeit) **(3+3+5 Punkte)**

Beweise, dass folgende Sprachen unentscheidbar sind!

a) $L = \{u \mid M_u$ hält für jede Eingabe$\}$

b) $L = \{u\#v \mid M_u$ und M_v halten für die gleichen Eingaben$\}$

c) $L = \{w \mid w$ ist in Z_E herleitbar$\}$

Aufgabe 2: (Beweissysteme) **(9 Punkte)**

In der Vorlesung wurde ein Beweissystem Z_E für die elementare Zahlentheorie eingeführt. Zeige:

$$Z_E \text{ ist inkonsistent } \iff \forall w \in L_E.\ w \text{ ist in } Z_E \text{ herleitbar}$$

Hinweis: Die Axiome und Schlussregeln von Z_E finden sich auf Seite 74 f. des Buches "Komplexitätstheorie" von W.J. Paul (Teubner, 1978), das auf der Vorlesungswebseite zu finden ist.

Aufgabe 3: (Konstruierbarkeit) **(5+5 Punkte)**

In der Komplexitätstheorie betrachten wir nur "gutartige" Schrankenfunktionen. Diese Eigenschaft ist formal durch die Zeit- bzw. Bandkonstruierbarkeit definiert. Zur Veranschaulichung sei folgendes zu zeigen:

a) Funktion $s(n) = n$ ist bandkonstruierbar.

b) Funktion $t(n) = n^2$ ist auf 2 Bändern zeitkonstruierbar.

Aufgabe 4: (Bandhierarchie) **(5+5 Punkte)**

In der Vorlesung wurde der Bandhierarchiesatz bewiesen, der grob besagt, dass man mit asymptotisch mehr Platz auch mehr Funktionen berechnen kann. Löse nun folgende Aufgaben.

a) Zeige folgendes Lemma:

> *Zu jeder totalen berechenbaren Funktion* $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *gibt es eine größere bandkonstruierbare Funktion* $s' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, *d.h. so dass* $s'(n) > s(n)$ *für alle* n *gilt.*

Tipp: Überlege dir, wieviel Platz die Berechnung von $s(n)$ verbraucht und was die größte Zahl ist, die durch eine Bandinschrift begrenzter Länge binär dargestellt werden kann!

b) Nutze a) und den Bandhierarchiesatz um folgende Aussage zu beweisen:

> *Für jede totale berechenbare Funktion* $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *gibt es eine entscheidbare Sprache, die von keiner* $\mathcal{O}(s(n))$*-bandbeschränkten Turingmaschine akzeptiert werden kann.*