



Aufgabe 1: (Schneller v-tree)

(5+5+4 Punkte)

Für die Implementierung der Logic Unit benötigten wir einen Gleichheitstester. Dieser verwendete einen Baum aus OR-Gattern zum Test auf Einsen. Die Tiefe dieser Konstruktion kann durch den Einsatz von negierten Schaltungsfunktionen verringert werden. Das NOR-Gatter $\bar{\vee}$ wurde auf dem letzten Übungsblatt eingeführt. Dementsprechend gibt es auch ein NAND-Gatter, das mit dem Symbol $\bar{\wedge}$ identifiziert wird. Es hat die folgende Funktionsweise.

x_1	x_2	$x_1 \bar{\wedge} x_2$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Offensichtlich gilt:

$$x_1 \bar{\wedge} x_2 = \overline{x_1 \wedge x_2}$$

Die Tiefe von NAND und NOR beträgt jeweils 1, die Kosten betragen jeweils 2.

- a) Konstruiere einen v-tree mit Eingang $a \in \{0, 1\}^n$ für $n = 2^k$, Ausgang $b \in \{0, 1\}$ und folgender Semantik!

$$b = \bigvee_{i=0}^{n-1} a[i]$$

Für die Tiefe soll gelten:

$$D(n) = \begin{cases} \log n & : k \text{ gerade} \\ \log n + 1 & : k \text{ ungerade} \end{cases}$$

- b) Beweise die Korrektheit deiner Konstruktion!
c) Beweise, dass deine Konstruktion die verlangte Tiefe besitzt!

Aufgabe 2: (Decoder)

(4+6 Punkte)

Betrachte den n -Decoder aus der Vorlesung! Beim Korrektheitsbeweis wurde bereits der Induktionsanfang und der Induktionsschritt im Falle $x_{n-1} = 0$ gezeigt. Es gelte die Induktionsvoraussetzung für $n-1$:

$$Dec_{n-1}(x[n-2:0]) = y[2^{n-1}-1:0] \quad \text{mit} \quad y_i = 1 \Leftrightarrow x = i.$$

- a) Beweise die Korrektheit von Dec_n !
b) Berechne und beweise Kosten und Tiefe des Decoders!

Aufgabe 3: (3-Port-RAM)**(6 Punkte)**Konstruiere ein 3-Port-RAM $S : \{0, 1\}^a \rightarrow \{0, 1\}^d$ mit folgenden Eigenschaften:

- S hat Eingänge $S_{Din} \in \{0, 1\}^d$; $S_{ada}, S_{adb}, S_{adc} \in \{0, 1\}^a$; $S_w \in \{0, 1\}$
und Ausgänge $S_{Dout_a}, S_{Dout_b} \in \{0, 1\}^d$
- Für $x \in \{0, 1\}^a$ gilt:

$$S^{t+1}(x) = \begin{cases} S_{Din}^t & : x = S_{adc}^t \text{ und } S_w^t = 1 \\ S^t(x) & : \text{sonst} \end{cases}$$

- $S_{Dout_a}^t = S^t(S_{ada}^t)$ und $S_{Dout_b}^t = S^t(S_{adb}^t)$

Aufgabe 4: (BONUS: Schneller Decoder)**(4*+5*+6* Punkte)**Seien $x \in \{0, 1\}^n$, $n = 2^k$.

- a) Konstruiere rekursiv einen schnellen Decoder $FDec_n$ mit:

$$\begin{aligned} C(FDec_n) &= 2 \cdot C(FDec_{n/2}) + 2^n \cdot 2 \\ D(FDec_n) &= D(FDec_{n/2}) + 2 \end{aligned}$$

- b) Beweise die Korrektheit deiner Konstruktion!
- c) Bringe die Kostenformel des Schaltkreises in eine geschlossene Form und beweise die Korrektheit deiner Lösung.