Universität des Saarlandes
FR 6.2 - Informatik
Prof. Dr. W.J. Paul
Dipl.-Ing. Christoph Baumann

5. Übungsblatt Informatik II

(Abgabe: 26.05.2008)

Aufgabe 1: (Basisoperator NOR) (8 Punkte)

Ein neuer Operator NOR $\overline{\vee}$ für Boolsche Ausdrücke ist durch die folgende Wertetabelle gegeben:

x_1	x_2	$x_1 \overline{\vee} x_2$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Jede Boolsche Funktion f lässt sich mit der Konjunktion, der Disjunktion und der Negation realisieren, deshalb nennt man $\{\neg, \wedge, \vee\}$ eine *Basis*.
Zeige: Der NOR- Operator bildet eine Basis, d.h. mit ihm kann jede Schaltfunktion f dargestellt werden.

Aufgabe 2: (signed *neg*-Bit) (5 Punkte)

Bei der Definition des *neg*-Bit der Arithmetic Unit hatten wir das exakte Ergebnis $r \in \mathbb{Z}$ eingeführt. Für $u = 0$ und $a, b \in \{0,1\}^n$ ist es wie folgt definiert.

$$r = \begin{cases} [a] + [b] & : \quad sub = 0 \\ [a] - [b] & : \quad sub = 1 \end{cases}$$

Beweise:

$$r \in T_{n+1}$$

Aufgabe 3: (AU) (5+(30÷$C(neg, ovf)$)+(10÷ $\max\{D(ovf), D(neg)\}$) Punkte)

Die Implementierung der Arithmetic Unit aus der Vorlesung ist unvollständig. Es wurden keine Schaltkreise für *ovf*- und *neg*-Bit konstruiert. Dies soll nun nachgeholt werden. Die folgenden Eingangssignale dürfen verwendet werden: a_{n-1}, d_{n-1}, c_n, s_{n-1}, u, sub

a) Die Definition von ovf verwendet das carry-Bit c_{n-1}. Gib eine Formel zu dessen Berechnung aus den gegebenen Signalen an! Beweise deinen Ansatz!
Tipp: Betrachte die Definition von s_{n-1}!
Was ergeben die booleschen Ausdrücke $x \oplus x$ und $x \oplus 0$ für ein $x \in \{0,1\}$?

b) Konstruiere einen Schaltkreis zur Berechnung von ovf und neg mit möglichst geringen Kosten (siehe Tabelle 1)! Die minimalen Kosten betragen 24.

c) Konstruiere einen Schaltkreis zur Berechnung von ovf und neg mit möglichst geringer Tiefe (siehe Tabelle 1)! Die minimale Tiefe beträgt für beide Signale 6.

Gatter	NOT	NAND/NOR	AND/OR	XOR/XNOR	MUX
Kosten	1	2	2	4	3
Tiefe	1	1	2	2	2

Tabelle 1: Die obigen Gatter mit den angegebenen Werten dürfen verwendet werden.

Aufgabe 4: (Compound Adder) **(8+6+2+6 Punkte)**

Ein *Compound Adder* ist ein Schaltkreis, der die folgende Funktion f berechnet:

$$f : \{0,1\}^{2n} \to \{0,1\}^{2n+2}, (a_{n-1}, \ldots, a_0, b_{n-1}, \ldots, b_0) \mapsto (s_n, \ldots, s_0, t_n, \ldots, t_0)$$
$$\text{mit } \langle s \rangle = \langle a \rangle + \langle b \rangle \text{ und } \langle t \rangle = \langle a \rangle + \langle b \rangle + 1.$$

a) Es seien $C(1) = a$ und $C(n) = 2 \cdot C(\frac{n}{2}) + b \cdot n + d$. Zeige für Zweierpotenzen n:

$$C(n) \in \mathcal{O}(n \log n)$$

Hinweis: $\mathcal{O}(g(n))$ bezeichnet die Komplexitätsklasse einer Funktion $f(n)$. Formal:

$$f(n) \in \mathcal{O}(g(n)) \quad \Leftrightarrow \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, c > 0 : \forall n \geq n_0 : f(n) \leq c \cdot g(n)$$

Weiterhin darf die folgende Annahme für eine Funktion $f(n)$ und Konstante d verwendet werden.

$$f(n) \in \mathcal{O}(n \log n) \quad \Rightarrow \quad f(n) + d \cdot \log n \in \mathcal{O}(n \log n)$$

b) Gib eine Konstruktion für Compound Adder mit Kosten $\mathcal{O}(n \log n)$ für Zweierpotenzen n an. **Tipp**: Teile die Eingangsbits in zwei Teilmengen auf und berechne zunächst die Teilsummen mit Hilfe von Compound Addern, die eine geringere Bitbreite aufweisen. Der Aufbau ist ähnlich dem eines *Conditional Sum Adders*.

c) Konstruiere mit Hilfe des Compound Adders einen n-Addierer der über Eingänge $a, b \in \{0,1\}^n$, $c_0 \in \{0,1\}$ und Ausgänge $s \in \{0,1\}^n$, $c_0 \in \{0,1\}$ verfügt, so dass gilt:

$$\langle c_n s[n-1:0] \rangle \quad = \quad \langle a[n-1:0] \rangle + \langle b[n-1:0] \rangle + c_0$$

d) Berechne und beweise die genauen Kosten und Tiefe deiner Konstruktion (siehe Tabelle 1)!