



Organisatorische Hinweise:

a) Zusätzlich zu den Übungsgruppen werden ab sofort zu den folgenden Terminen Beratungsstunden angeboten.

- Dienstag, 15-16 Uhr, E1.3 SR328
- Donnerstag, 14-15 Uhr, E1.3 SR328
- Freitag 12-13 Uhr, E1.3 SR328

Hier werden von Übungsgruppenleitern Fragen zur Vorlesung beantwortet und Unklarheiten beseitigt.

b) Die Prüfungsanmeldefrist im HISPOS endet am **16.05.2008**. Wer nicht im HISPOS für die Veranstaltung angemeldet ist, darf nicht an den Klausuren teilnehmen.

Aufgabe 1: (Äquivalenzrelation)

(5 Punkte)

Eine Relation, die reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, nennt man *Äquivalenzrelation*. a und b sind *kongruent modulo k* , wenn für $k \in \mathbb{N}$ und $a, b \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$a \equiv_{\text{mod } k} b \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{Z} : a - b = x \cdot k$$

Beweise, dass $\equiv_{\text{mod } k}$ eine Äquivalenzrelation ist!

Aufgabe 2 BONUS: (Zahlendarstellungen)

(5*+5* Punkte)

Sei $x \in \{0, 1\}^n$.

Beweise die Bijektivität der jeweiligen Abbildung!

a) (Binärdarstellung)

$$\langle \cdot \rangle : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, \dots, 2^n - 1\}, (x_{n-1}, \dots, x_0) \mapsto \sum_{i=0}^{n-1} x_i \cdot 2^i.$$

b) (Two's Complement Darstellung)

$$[\cdot] : \{0, 1\}^n \rightarrow \{-2^{n-1}, \dots, 2^{n-1} - 1\}, [x] := -x_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \langle x[n-2:0] \rangle$$

Aufgabe 3: (Rekurrenzen)

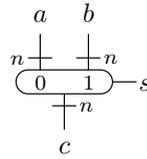
(5+5+8 Punkte)

In der aktuellen Vorlesungsmitschrift findet sich eine Einführung zu Kosten und Tiefe von Schaltkreisen und dem Auflösen von Rekurrenzen. Bringe folgende Formeln in eine geschlossene Form ohne Summenzeichen und beweise die Korrektheit deiner Lösung!

- $C(1) = 1, C(n) = C(n-1) + 2n - 1$ für $n \in \mathbb{N}$.
- $C(1) = 1, C(n) = C(n/2) + 2$ für $n = 2^k, k \in \mathbb{N}$.
- $C(1) = a, C(n) = 2 \cdot C(n/2) + 2a$ für $n = 2^k, a, k \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 4: (Multiplexer)**(3+4+3 Punkte)**

Ein n -Multiplexer (n -MUX) ist ein Schaltkreis mit Eingängen $a, b \in \{0, 1\}^n$, select-Bit $s \in \{0, 1\}$ und Ausgang $c \in \{0, 1\}^n$.



Für das Ausgangssignal c gilt:

$$c = \begin{cases} a & : s = 0 \\ b & : s = 1 \end{cases}$$

- Konstruiere einen 1 bit-Multiplexer! Berechne seine Kosten und Tiefe!
- Beweise die Korrektheit deiner Konstruktion!
- Konstruiere nun einen n -MUX! Gib Kosten und Tiefe an!

Aufgabe 5: (Full Adder)**(16 ÷ Kosten + 2 Punkte)**

- Konstruiere einen möglichst billigen Full Adder (siehe unten)! Der billigste Full Adder hat Kosten 11.
- Leite Kosten und Tiefe deiner Konstruktion her!

Die folgenden Gatter mit angegebenen Kosten und Tiefen dürfen verwendet werden.

Gatter	NOT	NAND/NOR	AND/OR	XOR/XNOR	MUX
Kosten	1	2	2	4	3
Tiefe	1	1	2	2	2