Universität des Saarlandes
FR 6.2 - Informatik
Prof. Dr. W.J. Paul
Dipl.-Ing. Christoph Baumann

2. Übungsblatt Informatik II

(Abgabe: 05.05.2008)

Aufgabe 1: (Boolesche Algebra) (4+4 Punkte)

Beweise die folgenden Gesetze für Boolesche Ausdrücke mit $a, b, c \in \{0, 1\}$!

a) Absorptionsgesetze:

$$a \wedge (a \vee b) \equiv a \qquad\qquad a \vee (a \wedge b) \equiv a$$

b) Distributivgesetz:

$$a \vee (b \wedge c) \equiv (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

Gib dabei die entsprechenden Zeilen der Definitionstabelle von $\wedge$ und $\vee$ an, die für die jeweiligen Schritte verwendet wurden!

Aufgabe 2: (Vereinfachung boolescher Ausdrücke) (4+4 Punkte)

a) Beweise die folgenden Sätze für $a \in \{0, 1\}$ per Wertetabelle!

$$\begin{array}{rclrcll} a \wedge 0 & \equiv & 0 & a \vee 1 & \equiv & 1 & \text{(Extremalgesetze)} \\ a \wedge 1 & \equiv & a & a \vee 0 & \equiv & a & \text{(Neutralitätsgesetze)} \\ a \wedge a & \equiv & a & a \vee a & \equiv & a & \text{(Idempotenzgesetze)} \\ \overline{\overline{a}} & \equiv & a & & & & \text{(Involution)} \end{array}$$

b) Vereinfache nun den folgenden booleschen Ausdruck soweit wie möglich! Es gilt $a, b \in \{0, 1\}$.

$$\overline{(\overline{(a \vee (a \wedge b))} \vee \overline{\overline{\overline{b \wedge \overline{(b \vee \overline{b})}}}})} \wedge ((a \vee \overline{(\overline{a} \wedge ((a \vee \overline{b}) \vee a))}) \wedge (a \wedge (b \vee \overline{b})) \vee b \wedge (a \vee 1)) \vee \overline{a}$$

Nutze dazu die Sätze und Definitionen über boolesche Operationen, die auf diesem Übungsblatt und in der Vorlesung eingeführt wurden. Gib für jeden Vereinfachungsschritt an, welche Regel verwendet wurde.

Aufgabe 3: (Verkettete boolesche Operationen) (4+4 Punkte)

Sei $x_i \in \{0, 1\}$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$. Gegeben sei nun folgende Notation für die logische AND- und OR-Verknüpfungen von n booleschen Variablen x_i.

- $\bigvee_{i=1}^{n} x_i = x_n \vee x_{n-1} \vee \cdots \vee x_1, \quad \bigvee_{i=1}^{1} x_i \overset{\text{def}}{=} x_1, \quad \bigvee_{i=1}^{0} x_i \overset{\text{def}}{=} 0$
- $\bigwedge_{i=1}^{n} x_i = x_n \wedge x_{n-1} \wedge \cdots \wedge x_1, \quad \bigwedge_{i=1}^{1} x_i \overset{\text{def}}{=} x_1, \quad \bigwedge_{i=1}^{0} x_i \overset{\text{def}}{=} 1$

Stelle für beide Verkettungsoperationen jeweils eine rekursive Definition auf und beweise durch vollständige Induktion:

a) $\bigvee_{i=1}^{n} x_i = 1 \;\Leftrightarrow\; \exists i \in \{1, \ldots, n\} : x_i = 1$

b) $\bigwedge_{i=1}^{n} x_i = 0 \;\Leftrightarrow\; \exists i \in \{1, \ldots, n\} : x_i = 0$

Aufgabe 4: (De Morgansche Gesetze) **(1+6 Punkte)**

a) Zeige durch Aufstellen der Wahrheitstabelle für $x, y \in \{0, 1\}$:

- $\overline{x \vee y} \equiv \overline{x} \wedge \overline{y}$
- $\overline{x \wedge y} \equiv \overline{x} \vee \overline{y}$

b) Beweise mittels Induktion über den Aufbau für alle $n \in \mathbb{N}_0, x_1, \ldots x_n \in \mathbb{B}$:

- $\overline{\bigvee_{i=1}^{n} x_i} \equiv \bigwedge_{i=1}^{n} \overline{x_i}$
- $\overline{\bigwedge_{i=1}^{n} x_i} \equiv \bigvee_{i=1}^{n} \overline{x_i}$

Aufgabe 5: (Zahlendarstellung) **(2+2 Punkte)**

Sei $a \in \{0, \ldots, B-1\}^m$ für $B \geq 2$ und $m, n \in \mathbb{N}^+$. Beweise die folgenden Sätze!

a) $\langle 0^n \; a[m-1:0] \rangle_B \equiv \langle a[m-1:0] \rangle_B$

b) $\langle a[m-1:0] \; 0^n \rangle_B \equiv \langle a[m-1:0] \rangle_B \cdot B^n$

Hinweis: $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Aufgabe 6: (Kleines 1+1) **(5 Punkte)**

In der Vorlesung wurde das Kleine 1+1 für Dezimalzahlen als Tabelle eingeführt, die aus Definitionen und Sätzen der Form

$$a + b \quad = \quad \langle c \; s \rangle_Z$$

besteht, wobei $a, b \in \{1, \ldots, 9\}$, $s \in \{0, \ldots, 9\}$ und $c \in \{0, 1\}$ gilt. Es soll nun der Satz

$$7 + 4 \quad = \quad \langle 1 \; 1 \rangle_Z$$

formal bewiesen werden. Dabei ist zu jedem Beweisschritt die verwendete Regel anzugeben.