Universität des Saarlandes
FR 6.2 - Informatik
Prof. Dr. W.J. Paul
Dipl.-Ing. Dominik Rester

2. Übungsblatt Informatik II

(Abgabe: 02.05.2005)

Organisatorische Hinweise:

1. 1. Teilklausur: Samstag, 18.06.05, 10-13 Uhr
   2. Teilklausur: Freitag, 29.07.05, 10-13 Uhr
   Nachklausur: Donnerstag, 29.09.05, 10-13 Uhr
2. Bestanden hat, wer beide Teilklausuren bestanden hat oder die Nachklausur bestanden hat.
3. Wer beide Teilklausuren bestanden hat, kann zusätzlich die Nachklausur mitschreiben.
4. Im Fall der Teilnahme an der Nachklausur zählt allein die Leistung in der Nachklausur.

---

1. **Aufgabe: (Psi Operator)** **(2 + 5 Punkte)**
   Wir definieren uns $\Psi : \{0,1\}^3 \rightarrow \{0,1\}$ mit folgender Wertetabelle:

x_0	x_1	x_2	$\Psi(x_0, x_1, x_2)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

   Es wird behauptet, daß es zu jeder n-stelligen Schaltfunktion f einen Ausdruck gibt, der nur aus Variablen, Konstanten und Anwendungen des Ψ Operators besteht und f berechnet.

   (a) Wie kann man, basierend auf dem Vorlesungsinhalt, die Behauptung leicht beweisen?
   (b) Beweise die Behauptung.

2. **Aufgabe: (Darstellungssatz)** **(5 Punkte)**
   In der Vorlesung haben wir bereits den Darstellungssatz in der vollständig disjunktiven Normalform bewiesen. Äquivalent dazu existiert der Darstellungsatz in der vollständig konjunktiven Normalform. Hierfür definieren wir für $a \in \{0,1\}^n$

$$c(a) := \bigvee_{i=1}^{n} X_i^{\overline{a_i}}$$

   Sei T_f der Träger von f. Zeige, daß für jede n-stellige Schaltfunktion f gilt:

$$f(x_1, \ldots, x_n) \equiv \bigwedge_{a \notin T_f} c(a)$$

Universität des Saarlandes
FR 6.2 - Informatik
Prof. Dr. W.J. Paul
Dipl.-Ing. Dominik Rester

2. Übungsblatt Informatik II

(Abgabe: 02.05.2005)

3. **Aufgabe: (konjunktive und disjunktive Normalform)** **(3 + 3 Punkte)**

x_0	x_1	x_2	f_1	f_2
0	0	0	1	1
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1

(a) Gebe zu obigen Funktionen die konjunktive Normalform an.

(b) Gebe zu obigen Funktionen die disjunktive Normalform an.

4. **Aufgabe: (Binärdarstellung)** **(6 Punkte)**
Zeige, daß es zu jeder Zahl x zwischen 0 und 2^n-1 genau eine n-stellige Binärdarstellung von$x$ gibt:

$$\forall x \in \{0, \ldots, 2^n - 1\} : \exists! a \in \{0,1\}^n :< a >= x$$

5. **Aufgabe: Zahldarstellung** **(2 + 2 Punkte)**
Zeige:

(a) $\langle 0^i, a \rangle = \langle a \rangle$

(b) $\langle a, 0^i \rangle = \langle a \rangle \cdot 2^i$

6. **Aufgabe: Kosten von Ausdrücken** **(4 + 4 + 6 Punkte)**
Die Anzahl der Zeichen $\vee$, $\wedge$ und $\sim$ in einem boole'schen Ausdruck e wird als Kosten des Ausdrucks e bezeichnet, kurz $L(e)$. Für eine Schaltfunktion f bezeichnet

$$L(f) = min\{L(e) : e \in BA, e \equiv f\}$$

die Kosten des billigsten Ausdrucks e, der f berechnet. Zeige:

(a) $L(f) \leq n \cdot 2^{n+1}$

(b) $f(x_1, \ldots, x_n) \equiv (x_1 \wedge f(1, x_2, \ldots, x_n)) \vee (\bar{x_1} \wedge f(0, x_2, \ldots, x_n))$

(c) Leite durch rekursives Anwenden obiger Formel folgende obere Schranke für die Kosten von f her:

$$L(f) \leq (5/2) \cdot 2^n - 4$$