2. Übungsblatt Informatik II
(Abgabe: 02.05.2005)

1. **Aufgabe:**

   (a) Nach dem in der Vorlesung bewiesenen Darstellungssatz lässt sich jede n-stellige Funk-Tion als elementarer BA ausdrücken, d.h. als Verkettung von *Literalen*, *und*'s, *oder*'s und *nicht*'s. Nach den Umformungsregeln von de Morgan kann man ausserdem Konjunktionen in Disjunktionen äquivalent umformen. Somit ist nur noch zu zeigen, dass der Ψ-Operator die Negation und Konjunktion (oder Disjunktion) simulieren kann.

   (b) Beweis: Der Ψ-Operator lässt sich mit $\Psi(x_0, x_1, x_2) \equiv x_0x_2 \vee \bar{x}_0x_1$ als boolscher Elementarausdruck schreiben. Daraus ergeben sich direkt folgende Äquivalenzen

1	0	x_0	$\bar{x}_0$	$x_0 \wedge x_1$	$x_0 \vee x_1$
$\Psi(1,1,1)$	$\Psi(0,0,0)$	$\Psi(x_0,0,1)$	$\Psi(x_0,1,0)$	$\Psi(x_0,0,x_1)$	$\Psi(x_0,x_1,1)$

2. **Aufgabe:**
   Es gelte:

$$\bigwedge_{a \notin T_f} c(a) = 0$$

$\Leftrightarrow c(b) = 0$ für mindestens ein $b \notin T_f$
$\Leftrightarrow$ für mindestens ein $b \notin T_f$:

$$\bigvee_{i=1}^{n} X_i^{\overline{b_i}} = 0$$

$\Leftrightarrow X_i^{\overline{b_i}} = 0 \qquad \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$
$\Leftrightarrow X_i \neq \overline{b_i} \qquad \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$
$\Leftrightarrow X_i = b_i \qquad \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$
$\Leftrightarrow X = b$
$\Leftrightarrow X \notin T_f$
$\Leftrightarrow f(X) = 0$

3. **Aufgabe:** Gegeben folgende Funktionstabelle:

x_0	x_1	x_2	f_1	f_2
0	0	0	1	1
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1

   (a) Konjunktive Normalform der Funktionen f_1, f_2:

2. Übungsblatt Informatik II
(Abgabe: 02.05.2005)

$f_1(x_0, x_1, x_2) = (x_0 \vee \overline{x_1} \vee \overline{x_2}) \wedge (\overline{x_0} \vee x_1 \vee x_2) \wedge (\overline{x_0} \vee x_1 \vee \overline{x_2}) \wedge (\overline{x_0} \vee \overline{x_1} \vee \overline{x_2})$

$f_2(x_0, x_1, x_2) = (x_0 \vee x_1 \vee \overline{x_2}) \wedge (x_0 \vee \overline{x_1} \vee x_2) \wedge (\overline{x_0} \vee x_1 \vee x_2) \wedge (\overline{x_0} \vee \overline{x_1} \vee x_2)$

(b) Disjunktive Normalform der Funktionen f_1, f_2:

$f_1(x_0, x_1, x_2) = (\overline{x_0} \wedge \overline{x_1} \wedge \overline{x_2}) \vee (\overline{x_0} \wedge \overline{x_1} \wedge x_2) \vee (\overline{x_0} \wedge x_1 \wedge \overline{x_2}) \vee (x_0 \wedge x_1 \wedge \overline{x_2})$

$f_2(x_0, x_1, x_2) = (\overline{x_0} \wedge \overline{x_1} \wedge \overline{x_2}) \vee (\overline{x_0} \wedge x_1 \wedge x_2) \vee (x_0 \wedge \overline{x_1} \wedge x_2) \vee (x_0 \wedge x_1 \wedge x_2)$

4. **Aufgabe:**

zu zeigen: $\forall x \in \{0, ..., 2^{n-1}\} : \exists! a \in \{0,1\}^n :< a >= x$

Wir können diese Behauptung folgendermassen umschreiben:

$\forall x \in \{0, ..., 2^{n-1}\}$ gibt es $x_o, ..., x_{n-1} \in \{0, 1\}$ so dass $x = \sum_{i=0}^{n-1} x_i * 2^i$. Diese x_i sind eindeutig bestimmt.

Wir zeigen zuerst für beliebiges x die Existenz eines Tupels $x_0, ..., x_{n-1}$ mit obigen Eigenschaften, danach zeigen wir die Eindeutigkeit. Den Existenzbeweis zeigen wir durch Induktion über n.

$n = 1$: Es gilt $x \in \{0, 1\}$. Man wählt $x_0 = x$.

$n - 1 \rightarrow n$: Man unterteilt die Menge $\{0, ...2^n - 1\}$ in 2 disjunkte Teilmengen
$I_j = \left\{j * 2^{n-1}, (j + 1) * 2^{n-1} - 1\right\}, j = 0, 1$

Die Zahl x ist in genau einer dieser Mengen I_j enthalten. Es gilt dann $x = j * 2^{n-1} + x'$, wobei $x' \in \left\{0, ..., 2^{n-1} - 1\right\}$. Nach Induktionsvorraussetzung gibt es eine Darstellung für x' : $x' = \sum_{i=0}^{n-2} x_i * 2^i$. Wählt man $x_{n-1} = j$ so erhält man eine Darstellung für x.

Zum Nachweis der Eindeutigkeit zeigen wir: aus $(x_{n-1}, ..., x_0) \neq (y_{n-1}, ..., y_0)$ folgt $\sum_{i=0}^{n-1} x_i * 2^i \neq \sum_{i=0}^{n-1} y_i * 2^i$.

Sei j der grösste Index , so dass $x_j \neq y_j$. Da $x_k = y_k$ für $k > j$, gilt dann

$$D = \sum_{i=0}^{n-1} x_i * 2^i - \sum_{i=0}^{n-1} y_i * 2^i = \sum_{i=0}^{j} (x_i - y_i) * 2^i.$$

Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x_j > y_j$, es gilt also $x_j - y_j \geq 1$. Da $x_k - y_k \leq 1$ gilt, lässt sich D abschätzen durch

$D \geq 2^j - \sum_{i=0}^{j-1} (2 - 1) * 2^i = 2^j - (2 - 1) * \frac{2^j - 1}{2 - 1}$
$= 1$

Also ist $D \neq 0$, und der Beweis ist abgeschlossen.

5. **Aufgabe:**

2. Übungsblatt Informatik II
(Abgabe: 02.05.2005)

a)

Zu zeigen ist $\langle 0^i, a\rangle = \langle a\rangle$

Wir werden die Darstellungszerlegung benutzten:
Sei $B \in \mathbb{N}, B \geq 2, a \in \{0, ..., B-1\}^n, 1 \leq h \leq n-1$ Dann gilt:

$$\langle a[n-1:0]\rangle_B = \langle a[n-1:h]\rangle_B.B^h + \langle a[h-1:0]\rangle_B$$

Sei $a \in \{0, ...m-1\}$.

- Fall 1: $i = 0$
  $\Rightarrow \langle 0^i, a\rangle = \langle 0^0, a\rangle = \langle a\rangle$
- Fall 2: $i > 0$. Sei $\langle b\rangle := \langle 0^i, a\rangle$
  Die Zahl b hat $m + i$ Stellen. Ersetze $h = m$ in der Darstellungszerlegung. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\langle b\rangle &= \langle b[m+i-1:m]\rangle.2^m + \langle b[m-1:0]\rangle \\
&= \langle \underbrace{0...0}_{j\,\text{mal}}\rangle.2^m + \langle a[m-1:0]\rangle \\
&= 0.2^m + \langle a\rangle \\
&= \langle a\rangle
\end{aligned}$$

b)

Zu zeigen ist: $\langle a, 0^i\rangle = \langle a\rangle$

Sei $a \in \{0, ...m-1\}$.

- Fall 1: $i = 0$
  $\Rightarrow \langle a, 0^i\rangle = \langle a, 0^0\rangle = \langle a\rangle$
- Fall 2: $i > 0$. Sei $\langle b\rangle := \langle a, 0^i\rangle$
  Die Zahl b hat $i + m$ Stellen. Ersetze $h = i$ in der Darstellungszerlegung. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\langle b\rangle &= \langle b[m+i-1:i]\rangle.2^i + \langle b[i-1:0]\rangle \\
&= \langle a[m-1:0]\rangle.2^i + \langle \underbrace{0...0}_{j\,\text{mal}}\rangle \\
&= \langle a\rangle.2^i + 0 \\
&= \langle a\rangle.2^i
\end{aligned}$$

6. **Aufgabe:**

2. Übungsblatt Informatik II
(Abgabe: 02.05.2005)

---

a)

zu zeigen: $L(f) \leq n * 2^{n+1}$
Jede Funktioon $f = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ ist in konjunktiver Normalform darstellbar.
Es gibt $max.\ 2^n Minterme \Rightarrow (2^n - 1)\ OR - Gatter.$
Jeder Minterm hat $n\ Literale \Rightarrow (n-1)\ AND - Gatter\ pro\ Minterm.$
Jedes Literal hat $max.\ 1\ Inverter \Rightarrow n\ Inverter\ pro\ Minterm.$
$\Rightarrow L(f) \leq (2^n - 1) * C(Or) + 2^n * ((n-1) * C(And) + n * C(Inv)) \Rightarrow L(f) \leq (2^n - 1) + 2^n * (2 * n - 1)$
$\Rightarrow L(f) \leq 2^n - 1 + n * 2^{n+1} - 2^n \Rightarrow L(f) \leq n * 2^{n+1}$

b)

$f(x_1, x_2, ..., x_n) = 1$
$\Leftrightarrow (x_1 = 1 \wedge f(1, x_2, ..., x_n) = 1) \vee (x_1 = 0 \wedge f(0, x_2, ..., x_n) = 1)$
$\Leftrightarrow (x_1 \wedge f(1, x_2, ..., x_n)) \vee (\bar{x_1} \wedge f(0, x_2, ..., x_n))$

c)

zu zeigen: $L(f) \leq \frac{5}{2} * 2^n - 4$
Beweis per Induktion über n:
I.A.: $n = 1 : L(1) = 1 \leq \frac{5}{2} * 2^1 - 4 = 5 - 4 = 1$ Kosten der Ausdrücke $0, 1, x_i, \bar{x_i}$
I.V.: $L(n-1) \leq \frac{5}{2} * 2^{n-1} - 4$
I.S.: $n - 1 \rightarrow n$
$L(n) \overset{wg.Teilb)}{=} C(Or) + 2 * C(And) + C(Inv) + 2 * L(n-1) = 4 + 2 * L(n-1) \overset{I.V.}{\leq} 4 + 2 * (\frac{5}{2} * 2^{n-1} - 4) =$
$4 + 5 * 2^{n-1} - 8 = \frac{5}{2} * 2^n - 4$