1. Übungsblatt Informatik II
(Abgabe: 25.04.2005)

---

1. **Aufgabe: (Boole'sche Ausdrücke)** **(5 Punkte)**
Sind die folgenden Ausdrücke vollständig geklammerte Boole'sche Ausdrücke? Begründe deine Antwort.

Definition: vollständig geklammerte BA

(a) $B_0 = V \cup 0, 1$

(b) $e_1, e_2 \in B_i \Rightarrow e_1, e_2 \in B_{i+1}, B_{i+2}...$

  i. $(\sim e_1) \in B_{i+1}$

  ii. $(e_1 \vee e_2) \in B_{i+1}$

  iii. $(e_1 \wedge e_2) \in B_{i+1}$

  iv. $(e_1 \oplus e_2) \in B_{i+1}$

  v. Sonst nichts ist in B_{i+1}

(c) $BA = \cup_{i=0}^{\infty} B_i$

a)

$(\sim (1 \vee (0 \wedge X_1)))$ ist ein vollständig geklammerter Bool'scher Ausdruck.
`Begründung:`

$0, 1, X_1 \in B_0, B_1, ...$
$(0 \wedge X_1) \in B_1, B_2...$
$(1 \vee (0 \wedge X_1)) \in B_2, B_3, ...$
$(\sim (1 \vee (0 \wedge X_1)) \in B_3, B_4, ...$
$\Rightarrow (\sim (1 \vee (0 \wedge X_1))) \in BA$

b)

$((0 \vee (\sim 1)) \wedge (X_2 \vee (\sim\sim X_{88})))$ ist kein vollständig geklammerter Bool'scher Ausdruck.
Begründung:

$0, 1, X_2, X_{88} \in B_0, B_1, ...$
$\sim X_{88} \notin B_1, ...$
$\Rightarrow ((0 \vee (\sim 1)) \wedge (X_2 \vee (\sim\sim X_{88}))) \notin BA$

c)

$(\sim (\sim (X_0 \wedge X_0))))$ ist kein vollständig geklammerter Bool'scher Ausdruck.
Begründung:

$X_0 \in B_0, B_1, ...$
$(X_0 \wedge X_0) \in B_1, B_2, ...$
$(\sim (X_0 \wedge X_0)) \in B_2, B_3, ...$
$(\sim (\sim (X_0 \wedge X_0))) \in B_3, B_4, ...$

$(\sim (\sim (X_0 \wedge X_0)))) \notin B_4, ...$
$\Rightarrow (\sim (\sim (X_0 \wedge X_0)))) \notin BA.$

d)

$(\sim (X_1 \wedge X_2) \wedge 1)$ ist kein vollständig geklammerter Bool'scher Ausdruck.
Begründung:

$1, X_1, X_2 \in B_0, B_1, ...$
$(X_1 \wedge X_2) \in B_1, B_2, ...$
$\sim (X_1 \wedge X_2) \notin B_2, B_3 ...$
$\Rightarrow (\sim (X_1 \wedge X_2) \wedge 1) \notin BA.$

d)

$((\sim (\sim (X_1 \wedge X_2))) \vee ((X_2 \oplus (\sim X_3))))$ ist kein vollständig geklammerter Bool'scher Ausdruck.
Begründung:

$(\sim X_3) \in B_1, B_2, ...$
$(X_2 \oplus (\sim X_3)) \in B_2, B_3, ...$
$((X_2 \oplus (\sim X_3))) \notin B_3, B_4, ...$
$\Rightarrow ((\sim (\sim (X_1 \wedge X_2))) \vee ((X_2 \oplus (\sim X_3)))) \notin BA.$

1. Übungsblatt Informatik II
(Abgabe: 25.04.2005)

---

2. **Aufgabe: (Induktionsbeweise Summenformeln)** **(1 + 2 + 3 + 3 +5* Punkte)**
Beweise per Induktion $\forall n \in \mathbb{N}_0$:

a) zu zeigen: $\sum_{i=0}^{n} 2 * i = n * (n+1)$

I.A.: $n = 0 : \sum_{i=0}^{0} 2 * i = 0 = 0 * (0+1)$

I.V.: $\sum_{i=0}^{n} 2 * i = n * (n+1)$

I.S.: $n \to n+1$

$\sum_{i=0}^{n+1} 2 * i = 2 * (n+1) * \sum_{i=0}^{n} 2 * i \stackrel{I.V.}{=} 2 * (n+1) * n * (n+1) = (n+1) * (n+2) \Rightarrow Beh.$

b) zu zeigen: $\sum_{i=0}^{n} 6 * i^2 = n * (n+1) * (2 * n + 1)$

I.A.: $n = 0 : \sum_{i=0}^{0} 6 * i^2 = 0 = 0 * (0+1) * (2 * 0 + 1)$

I.V.: $\sum_{i=0}^{n} 6 * i^2 = n * (n+1) * (2 * n + 1)$

I.S.: $n \to n+1$

$\sum_{i=0}^{n+1} 6 * i^2 = 6 * (n+1)^2 + \sum_{i=0}^{n} 6 * i^2 \stackrel{I.V.}{=} 6 * (n+1)^2 + n * (n+1) * (2n+1)$
$= (n+1) * (6 * (n+1) + n * (2 * n + 1)) = (n+1) * (2 * n^2 + 7 * n + 6)$
$= (n+1) * (n+2) * (2 * n + 3) \Rightarrow Beh.$

c) zu zeigen: $\sum_{i=0}^{n} (i * \sqrt[3]{4})^3 = n^2 * (n+1)^2$

$\sum_{i=0}^{n} (i * \sqrt[3]{4})^3 = \sum_{i=0}^{n} i^3 * 4$

I.A.: $n = 0 : \sum_{i=0}^{0} i^3 * 4 = 0 = 0^2 * (0+1)^2$

I.V.: $\sum_{i=0}^{n} i^3 * 4 = n^2 * (n+1)^2$

I.S.: $n \to n+1$

$\sum_{i=0}^{n+1} i^3 * 4 = 4 * (n+1)^3 + \sum_{i=0}^{n} i^3 * 4 \stackrel{I.V.}{=} 4 * (n+1)^3 + n^2 * (n+1)^2$
$= (n+1)^2 * (4 * (n+1) * n^2) = (n+1)^2 * (n^2 + 4 * n + 4)$
$= (n+1)^2 * (n+2)^2 \Rightarrow Beh.$

d) zu zeigen: $\sum_{i=0}^{n} i^3 = (\sum_{i=0}^{n} i)^2$

Am einfachsten lässt sich dies mit Hilfe von Teil a und Teil c zeigen (also ohne "direkte" Induktion)

Aus Teil a) folgt: $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{1}{2} * n * (n+1) \Rightarrow (\sum_{i=0}^{n} i)^2 = \frac{1}{4} * n^2 * (n+1)^2$

Aus Teil c) folgt: $\sum_{i=0}^{n} i^3 = \frac{1}{4} * n^2 * (n+1)^2$

$\Rightarrow Beh.$

1. Übungsblatt Informatik II
(Abgabe: 25.04.2005)

---

e) zu zeigen: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} * a^k * b^{n-k}$

I.A.: $n = 0 : (a+b)^0 = 1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} * a^0 * b^0$

I.V.: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} * a^k * b^{n-k}$

I.S. $n \rightarrow n+1$

$$
\begin{aligned}
&(a+b)^{n+1} = (a+b)*(a+b)^n \stackrel{I.V.}{=} (a+b) * \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} * a^k * b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} * a^{k+1} * b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} * a^k * b^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \begin{pmatrix} n \\ k-1 \end{pmatrix} * a^k * b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} * a^k * b^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \begin{pmatrix} n \\ k-1 \end{pmatrix} * a^k * b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n+1} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} * a^k * b^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \left(\begin{pmatrix} n \\ k-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \right) * a^k * b^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \begin{pmatrix} n+1 \\ k \end{pmatrix} * a^k * b^{n+1-k} \Rightarrow Beh.
\end{aligned}
$$

3. **Aufgabe: (Morgan-Formeln)** **(2 Punkte)**

Zeige $\forall x, y \in \{0, 1\}$ gilt:

$$x \vee y = \overline{\overline{x} \wedge \overline{y}}$$

Da es sich hierbei nur um 2 Variablen handelt, reicht eine Wertetabelle aus, um die Korrektheit zu zeigen:

x	y	x ∨ y	$\overline{x}$	$\overline{y}$	$\overline{x} \wedge \overline{y}$	$\overline{\overline{x} \wedge \overline{y}}$
0	0	0	1	1	1	0
0	1	0	1	0	1	0
1	0	0	0	1	1	0
1	1	1	0	0	0	1

4. **Aufgabe:** **(2 + 3 + 3 Punkte)**

Beweise oder widerlege per Gegenbeispiel: