



4. Übungsblatt Informatik II (Abgabe: 24.05.2004)

1. **Aufgabe: (Multiplikation)** (4 Punkte)

Verwende die Definitionen aus der Vorlesung. Beweise:

- (a) $2 \cdot 2 = 4$
- (b) $\langle 1, 1 \rangle_{10} = 4 + 7$

2. **Aufgabe: (Zahlendarstellung 1)** (6 Punkte)

Sei $a \in \{0, 1\}^m$; $m, n, i, j \in \mathbb{N}$; $m \geq n$. Beweise:

- (a) $\langle a, 0^i \rangle = \langle a \rangle \cdot 2^i$
- (b) $\langle 0^j, a \rangle = \langle a \rangle$
- (c) $\langle a[m-1:0] \rangle_B \equiv \langle a[n-1:0] \rangle_B \pmod{B^n}$

3. **Aufgabe: (Modulorechnung)** (6 Punkte)

Seien $a, b \in \mathbb{Z}$; $k \in \mathbb{N}$. Beweise:

$$a = b \pmod{k} \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{Z} : a - b = x \cdot k$$

4. **Aufgabe: (Zahlendarstellung 2)** (6 Punkte)

Sei $a \in \{0, 1\}^n$. Beweise: Die Abbildung

$[\] : \{0, 1\}^n \rightarrow \{-2^{n-1}, \dots, 2^{n-1} - 1\}$; $[a] := -a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \langle a[n-2:0] \rangle$
ist bijektiv.

5. **Aufgabe: (Modified Conditional Sum Adder)** (4 + 6 + 4 + 6 Punkte)

Für die Bestimmung der Kosten ($C(\dots)$) und der Tiefe ($T(\dots)$, Delay) ist die Tabelle 2.1, Seite 8 aus *Müller/Paul: Computer Architecture* zu verwenden.

- (a) Seien $a, b \in \{0, 1\}$; $s, t \in \{0, 1\}^2$.
Konstruiere einen Schaltkreis, der die Funktion
 $MCSA_1 : (\langle s \rangle, \langle t \rangle) := (\langle a \rangle + \langle b \rangle, \langle a \rangle + \langle b \rangle + 1)$ berechnet.
Der Schaltkreis darf maximal Kosten von 12 und eine Tiefe von 2 haben.
- (b) **(BONUS)** Seien $a, b \in \{0, 1\}^n$; $s, t \in \{0, 1\}^{n+1}$; $n = 2^k, k \in \mathbb{N}$.
Konstruiere rekursiv einen Schaltkreis, der die Funktion
 $MCSA_n : (\langle s \rangle, \langle t \rangle) := (\langle a \rangle + \langle b \rangle, \langle a \rangle + \langle b \rangle + 1)$ berechnet.
Der Schaltkreis darf maximal Kosten von $2 \cdot C(MCSA_{\frac{n}{2}}) + 3 \cdot (n + 2)$ und eine Tiefe von $T(MCSA_{\frac{n}{2}}) + 2$ haben.
- (c) **(BONUS)** Konstruiere einen n-Bit-Addierer. Benutze dazu einem $MCSA_n$. Die zusätzlichen Kosten im Vergleich zum $MCSA_n$ dürfen maximal $3 \cdot (n + 2)$ und die zusätzliche Tiefe maximal 2 betragen.
- (d) **(BONUS)** Bringe die Kostenformel des so gebauten Addierers in eine geschlossene Form und beweise die Korrektheit deiner Antwort.