Universität des Saarlandes
FR 6.2 - Informatik
Prof. Dr. W.J. Paul
M. Sc. Jakov Dalinger
Dr.-Ing. Dirk Benyoucef

3. Übungsblatt Informatik II

(Abgabe: 17.05.2004)

Klausurtermine:

1. Teilklausur: Samstag, 19.06.04, 10-14 Uhr, Geb 45, Hörsaal II
2. Teilklausur: Samstag, 07.08.04, 10-14 Uhr, Geb 45, Hörsaal II

Nachklausur: Samstag, 16.10.04, 10-14 Uhr, Geb 45, Hörsaal II

Definition: Jede Zeichenreihe $d = d_{n-1}...d_0 \in \{0, ..., B-1\}^n$ ist eine n-stellige Zahlendarstellung zur Basis B. Man definiert die durch d darstellte Zahl als:

$$\langle d[n-1:0]\rangle_B = \sum_{i=0}^{n-1} d_i \cdot B^i$$

1. **Aufgabe: (Baum)** **(4 Punkte)**
   Beweise per Induktion:
   Seien $Tiefe(\bigwedge_2) = 1$ und $Tiefe(\bigwedge_n) = Tiefe(\bigwedge_{n/2}) + 1$, mit $n = 2^i$, i eine natürliche Zahl und $i \geq 1$. Dann gilt:
   $Tiefe(\bigwedge_n) \leq \lceil \log(n) \rceil$.

2. **Aufgabe: (Eindeutigkeit der Zahlendarstellung)** **(6 Punkte)**
   Zeige, dass die folgende Funktion $\langle\cdot\rangle$ bijektiv ist:
   $$\langle\cdot\rangle : \{0,1\}^n \to \{0, \ldots, 2^n - 1\}, (x_{n-1}, \ldots, x_0) \mapsto \sum_{i=0}^{n-1} x_i \cdot 2^i.$$

3. **Aufgabe: (Reihenformel)** **(4 Punkte)**
   Sei $B \in \mathbb{N};\ B \geq 1$. Beweise:
   $\sum_{i=0}^{n-1}(B-1) \cdot B^i = B^n - 1$

4. **Aufgabe: (Darstellungszerlegung)** **(6 Punkte)**
   Sei $B \in \mathbb{N};\ B \geq 2;\ a \in \{0, ..., B-1\}^n;\ 1 \leq h \leq n-1$.
   Beweise:
   $\langle a[n-1:0]\rangle_B \ = \ \langle a[n-1:h]\rangle_B \cdot B^h + \langle a[h-1:0]\rangle_B$

5. **Aufgabe: (Additionsalgorithmus)** **(6 Punkte)**
   Sei $B \in \mathbb{N};\ B \geq 2;\ c_{-1} \in \{0,1\}$;
   sei $a_i, b_i, s_i \in \{0, ..., B-1\}, c_i \in \{0,1\}$, wobei $0 \leq i \leq n-1$;
   $\langle c_i\ s_i\rangle_B = a_i + b_i + c_{i-1}$.
   Beweise:
   $\langle c_{n-1}\ s[n-1:0]\rangle_B \ = \ \langle a[n-1:0]\rangle_B + \langle b[n-1:0]\rangle_B + \ c_{-1}$

6. **Aufgabe: (Schaltkreiskomplexität)** **(6 Punkte)**

   (a) Zeige: ein Gatter g mit $Tiefe(g) = k$ hängt von höchstens 2^k Eingängen ab.

3. Übungsblatt Informatik II

(Abgabe: 17.05.2004)

(b) Sei S ein n-bit Addierer. Zeige: $Tiefe(S) \geq \log(n) + 1$

7. **Aufgabe: (Schaltkreiskomplexität)** **(8+**$4^* + 4^*$ **Punkte)**

Sei $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ ist eine Funktion.

(a) Zeige:
$f(x[n-1:0]) = \bigvee_{a \in \{0,1\}^s} m(a) \wedge f(x[n-1:s], a)$

(b) **(BONUS)** Konstruiere einen Schaltkreis, der alle Funktionen $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ berechnet. Kosten = ?

(c) **(BONUS)** Zeige:
Für jede Schaltfunktion $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ gibt es ein Schaltkreis S mit Kosten $C(S) = O(2^n/n)$, der f berechnet.
Hinweis: Definition der O-Notation steht im Buch
Cormen, Leiserson, Rivest. ≪Introduction to algorithms≫. S.26,1990.

8. **Aufgabe: (BONUS)** (10^* **Punkte)**

Sei $N(k,n)$ die Anzahl der Schaltfunktionen $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, die durch einen Schaltkreis S mit Kosten $C(S) \leq k$ berechnet werden können.

(a) Zeige:
$N(k,n) \leq (n+k+2)^{2k+1} \cdot k^4$.

(b) Beweise oder widerlege:
Für genügend große n gibt es eine Funktion $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ so dass gilt:
jeder Schaltkreis S, der f berechnet, hat Kosten $C(S) \geq (1/100) \cdot (2^n/n)$.