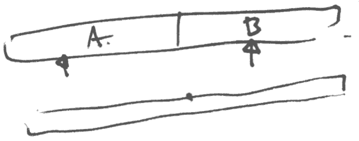
1.1 für Länge

$|A| = n \quad |B| = m$

$$\text{merge}(A,B) = \min\{A[1], B[1]\} \circ \begin{cases} \text{merge}(A[2:n], B[1:m]) & A[1] < B[2] \\ \text{merge}(A[1:n], B[2:m]) & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{merge}(A, \varepsilon) = A = \text{merge}(\varepsilon, A)$$

Bei Bläser:



aber: Basisfall komplizierter

$$\text{msort}(A[1:n]) = \text{merge}(\text{msort}(A[1:n/2]), \text{msort}(A[n/2+1:n]))$$

$S(n)$ = # Vergleiche von msort$(A[1:n])$

$$S(n) = 2S(n/2) + M(n) \leq 2S(n/2) + n = O(n \log n)$$

Quick Sort

Probabilistischer Algorithmus

→ mit Zufallsexperiment (in Analyse)

↓ modelliert durch W-Räume

$W = (S, p)$ $\qquad$ S = Sample space (abzählbar)

mögliche Ergebnisse des Experiments

p = Verteilung $\qquad p : S \to \mathbb{R}^+$

$$\sum_{x \in S} p(x) = 1$$

Zufalls Variable

$$X : S \to \mathbb{R}$$

$$E(X) = \sum_{x \in S} X(x) \cdot p(x)$$

→ $T(n)$ bei Quicksort: Erwartete Anzahl der Vergleiche

$$P(Q(x)) = \sum_{x \in S:\, Q(x)} p(x)$$

W_n : W-Raum für Quicksort , $|A| = n$

Probabilistische Analyse von Algorithmen, entweder

- Input zufällig $\quad p = ?$ Gültigkeit des Modells ?

oder

- Algorithmus generiert Zufallszahlen

Toll: volle Kontrolle

random (n) $\in [1:n] = S \qquad p(i) = \frac{1}{n}$

ABER: Pseudo-Zufall garantiert nicht zufällig

→ Mathematik ist experimentelle Wissenschaft!
(muss besonders selten repariert werden)

WUNDER : probabilistische Analyse mit echten Zufallszahlen passt zum programmieren mit Pseudo Zufallszahlen

$A \subseteq S$ heisst Ereignis

Würfel: $S = \{1, \dots, 6\}$ $\quad p(i) = \frac{1}{6}$

$A = \{, 1, 3, 5\}$ "Gerade Zahl gewürfelt" $\quad B = \{2, 4, 6\}$ "Ungerade"

$P(A) = \sum_{x \in A} p(x)$

Unabhängig Ereignisse:

A, B unabh.

$$P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$$

Würfel:

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \neq 0 = P(\emptyset) = P(A \cap B)$$

$\to$ nicht unabhängig

Zwei Experimente: $\quad W_1 = (S_1, P_1) \quad W_2 = (S_2, P_2)$

~~$W_2 = (\not{S}_2, P_2)$~~

$$W_1 \times W_2 = (S_1 \times S_2, q)$$

$$q(i, j) = \cancel{p(i) \cdot q(\cdot}$$
$$= p_1(i) \cdot p_2(j)$$

(OB) L: $W_1 \times W_2$ ist ein W-Raum

L: $A \subseteq S_1 \quad B \subseteq S_2$ $\quad e(A) = A \times S_2 \subseteq S_1 \times S_2$

$\quad e(B) = S_1 \times B \subseteq S_1 \times S_2$

$e(A), e(B)$ in $W_1 \times W_2$ unabh.

L: $q(e(A)) = p_1(A)$

$q(e(B)) = p_2(B)$

Allgemeiner

$W = (S, p)$

$A_1, \dots, A_n \subseteq S$ Ereignisse

gegenseitig unabhängig

- $\forall k \subseteq \{1, \dots, n\}$

$\cancel{(P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot \dots \cdot P(A_n))}$

Aufgabe: Warum nicht nicht
$p(A_1 \cap \dots \cap A_n) = p(A_1) \cdot \dots \cdot p(A_n)$?

Deshalb ist die definition:

$$P\Big(\bigcap_{i \in k} A_i\Big) = \prod_{i \in k} P(A_i)$$

Konvention: für $W_i = (S_i, p_i)$ $i = 1, \dots, n$

$$W_1 \times \dots \times W_n = (S_1 \times \dots \times S_n, q)$$

mit

$$q((a_1, \dots, a_n)) = q(a_1) \cdot \dots \cdot q(a_n)$$

L: Für $A_1 \dots A_n$ sind $e_i = S_1 \times \dots \times A_i \times \dots \times S_n$

gegenseitig unabhängig q

Quicksort $\quad$ qsort [A[1:n]]

$y =$ random (n) $\quad$ splitter / pivot $A[y]$

$$\left.\begin{aligned} A_< &= (A[k] \mid A[k] < A[y]) \\ A_= &= (A[k] \mid A[k] = A[y]) \\ A_> &= (A[K] \mid A[k] > A[y]) \end{aligned}\right\} \begin{matrix} \leq n \\ \text{vergleiche} \end{matrix}$$

$$qsort(A) = qsort(A_<) \circ A_= \circ qsort(A_>)$$

Behauptung: $T(n) \leq n + \sum_i \frac{1}{n} (T(i-1) + T(n-i))$

Beweis: Def. $W_n = (S_n, p_n)$

& $\quad S_n = \bigcup_{i=1}^{n} \{i\} \times S_{i-1} \times S_{n-i}$

$\quad p_n((i, a, b)) = \frac{1}{n} \cdot p_{i-1}(a) \cdot p_{n-i}(b)$

(OB) L: W_n ist W-Raum

$T(i, a, b) =$ # vergleiche für experiment (i, a, b)

$$T(n) = \sum_{(i,x,y)} T(i,x,y) \frac{1}{n} p_{i-1}(x) p_{n-i}(y)$$

$$\leq \sum \frac{1}{n} p_{i-1}(x) p_{n-i}(y) (n + T_{i-1}(x) + T_{n-i}(y))$$