**University of the Saarland**
**Department 6.2 - Informatik**
**Prof. Dr. W.J. Paul**

# Computer Architecture I - WS 02/03

**(bis: 25.11.2002)**

**Aufgabe 1: (Binäre Repräsentierung der $E_{2j}$)** **(2 Punkte)**

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass (für $j > 0$) die binäre Repräsentierung $e_{2j}$ von $E_{2j}$ durch folgende Gleichung berechnet werden kann:

$$\begin{aligned} \langle e_{2j} &= \langle 1\overline{s_{2j}}, d_{2j} \oplus s_{2j}\rangle + s_{2j} \\ \langle e_0 &= \langle \overline{s_0} s_0 s_0, d_0 \oplus s_0\rangle + s_0. \end{aligned}$$

Zeigen sie die Korrektheit der Gleichung für $j = 0$.

**Aufgabe 2: (Encoder)** **( 4 + 4 + 2 + 2 Punkte)**

Ein $2^n$ Bit-Encoder ist ein Schaltkreis mit Eingabe $x[2^n - 1 : 0]$ und Ausgabe $y[n-1:0]$. Wenn genau ein Bit der Eingabe 1 ist, berechnet der Encoder die Position dieser 1.

$$x = 0^{n-i-1}10^i \Longrightarrow y = \langle i \rangle$$

Wenn es gar keine 1 oder mehr als eine 1 in der Eingabe gibt, ist die Ausgabe nicht definiert.

1. Konstruieren sie einen $2^n$-Bit Encoder.
2. Beweisen sie die Korrektheit ihres Entwurfes.
3. Bestimmen sie Kosten und Delay ihrer Konstruktion in Form von Rekursionsgleichungen. Die Korrektheit dieser Gleichungen muss nicht bewiesen werden.
4. Was ist die Ausgabe ihrer Schaltung, falls die Eingabe nicht genau eine 1 enthält?

**Aufgabe 3: (Multiplikation von Zweierkomplement-Zahlen) (3 + 3 Punkte + 8 Bonuspunkteq)**

Die Multiplizierer aus der Vorlesung haben nur positive Zahlen multipliziert.

1. Entwerfen sie einen Multiplizierer der Zweierkomplementzahlen multipliziert. Dafür sollten sie die folgende Regel benutzen:

$$a * b = \begin{cases} +|a| * |b| \text{ if } (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0) \\ -|a| * |b| \text{ if } (a > 0 \wedge b < 0) \vee (a < 0 \wedge b > 0) \end{cases}$$

   und dass man $-x$ durch invertieren aller Bits von $x$ und anschließendes Inkrementieren berechnen kann.

2. Beweisen sie für $a[n-1:0]$ und $b[n-1:0]$ die folgende Identität:

$$[a] * [b] = < a > * < b > -2^n * a_{n-1} * b[n-2:0] - 2^n * b_{n-1} * a[n-2:0]$$

   .

3. (Bonus) Können sie (mit Hilfe der Formel aus Teil 2) einen Multiplizierer für Zweierkomplementzahlen entwerfen, der ohne das zusätzliche Delay der Inkrementer auskommt?

   Tipp: Sie können den Inkrementer in den Addiererbaum einbauen.

**Aufgabe 4: (Karatsuba Offman Multiplizierer) ( 2 + 4 + 4 Punkte)**

Für Bitvektoren $a[n-1:0]$ und $b[n-1:0]$ kann man $a * b$ folgendermaßen berechnen[1]:

Sei

$$\begin{aligned} r &= a[n-1:n/2] * b[n-1:n/2] \\ s &= (a[n-1:n/2] + a[n/2-1:0]) * (b[n-1:n/2] + b[n/2-1:0]) \\ t &= a[n/2-1:0] * b[n/2-1:0] \end{aligned}$$

Dann gilt: $a * b = 2^n * r + (s - r - t) * 2^{n/2} + t$.

1. Zeigen sie die Korrektheit dieser Formel.
2. Bauen sie einen Multiplizierer, der auf obiger Formel basiert.
3. Beweisen sie, dass die Kosten für ihre Konstruktion in $O(n^{\log 3})$ liegen.

[1] n ist eine Zweierpotenz