**Universität des Saarlandes**
**FR 6.2 - Informatik**
Prof. Dr. W.J. Paul
Dipl.-Ing. Christoph Baumann

**Theoretische Informatik**
**9. Übungsblatt**
(Abgabe: 16.01.2013)

---

**Aufgabe 1: (Rekursionstheorem)** **(7 Punkte)**
In der Vorlesung wurde das Rekursionstheorem eingeführt, das wie folgt lautet:

> *Für jede totale berechenbare Funktion $h : \mathbb{B}^* \to \mathbb{B}^*$ existiert ein Fixpunkt $u$, so dass $u$ und $h(u)$ zwei Programme mit der gleichen Funktion kodieren.*

$$\varphi_u = \varphi_{h(u)}$$

Beweise das Rekursionstheorem mit Hilfe des $s_n^m$-Theorems vom letzten Übungsblatt!
**Hinweis:** Eine Gödelisierung $u \in \mathbb{B}^*$ kann auch als natürliche Zahl $\langle u \rangle \in \mathbb{N}_0$ dargestellt werden.

**Aufgabe 2: (Entscheidbarkeit)** **(2+3+3+3+4 Punkte)**
Bestimme den Wahrheitsgehalt jeder der folgenden Implikationen! $L$ und $L'$ beschreiben hier immer Sprachen über Alphabet $\{0, 1, \#\}$. Beweise deine Antworten!

a) $L$ r.e. $\Longrightarrow$ $\overline{L}$ r.e.

b) $L \leq L'$ und $L$ entscheidbar $\Longrightarrow$ $L'$ entscheidbar

c) $L \leq L'$ und $L$ r.e. $\Longrightarrow$ $L'$ r.e.

d) $L$ regulär $\Longrightarrow$ $L$ entscheidbar

e) $L$ kontextfrei $\Longrightarrow$ $L$ entscheidbar

**Aufgabe 3: (Reduktion)** **(2+2+2+2 Punkte)**
Für zwei Sprachen $L$, $L'$ über das Alphabet $\{0, 1, \#\}$ sagt man, dass $L$ auf $L'$ *reduzierbar* ist, genau dann wenn eine totale berechenbare Funktion $r$ existiert, so dass:

$$\forall w.\ w \in L \iff r(w) \in L'$$

Beweise oder widerlege folgende Aussagen:

a) Die Relation $L \leq L'$ ist reflexiv, d.h. $\forall L.\ L \leq L$.

b) Die Relation $L \leq L'$ ist symmetrisch, d.h. $\forall L, L'.\ L \leq L' \Longrightarrow L' \leq L$.

c) Die Relation $L \leq L'$ ist antisymmetrisch, d.h. $\forall L, L'.\ L \leq L' \wedge L' \leq L \Longrightarrow L = L'$.

d) Die Relation $L \leq L'$ ist transitiv, d.h. $\forall L, L', L'.\ L \leq L' \wedge L' \leq L'' \Longrightarrow L \leq L''$.

**Aufgabe 4: (Reduktionsbeweise)** **(5+5 Punkte)**
Zeige die Unentscheidbarkeit von $L_a$ und $L_b$ durch Reduktion eines unentscheidbaren Problems!

a) $L_a = \{u \mid M_u$ akzeptiert unendlich viele Eingaben$\}$

b) $L_b = \{u \mid M_u$ akzeptiert nur Eingabe 1100101$\}$