Saarland University
Department 6.2 - Computer Science
Prof. Dr. W. J. Paul
Jonas Oberhauser

System Architecture - SS15

Exercise Sheet 2(due: May 4, 2015)

Wichtig:

- Sie Benötigen 50% aller Übungsblätter die für Klausur X relevant sind, um zu Klausur X zugelassen zu werden. Dieses Blatt ist Relevant für Vor- und Nachklausur.
- Das Übungsblatt muss stets am Montag nach der Vorlesung bei mir in der Office Hour oder, falls zeitgleich, in der Übungsgruppe Ihrer Tutorin abgegeben werden.
- Geben Sie stets Ihren Namen, Ihre Matr. Nr., und den Namen ihrer Tutorin auf der vordersten Seite oben rechts an.
- Sie dürfen Ergebnisse von vorherigen Aufgaben verwenden, auch wenn Sie diese nicht gelöst haben. Markieren sie Gleichungen, in denen Sie ein vorheriges Ergebniss benutzen, mit dem Kürzel E+Aufgabenblatt+Aufgabennummer.
- Wenn Sie sich nicht für die Klausur vorbereiten möchten, aber trotzdem zugelassen werden möchten, schreiben Sie einfach Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf die Lösung einer kompetenten Mitstudentin. Es besteht auch keine Anwesenheitspflicht in den Übungsgruppen.

Tutor: ______________________________

Namen, Matr. Nummern: ______________________________

Aufgabe 1: (2)

Was ist der Unterschied zwischen:

(a) mod und tmod

(b) $\langle\cdot\rangle$ und $[\cdot]$

Geben Sie Argumente an, bei denen die jeweiligen Funktionen unterschiedliche Ergebnisse liefern.

Solution: Die Funktion mod berechnet den Repräsentanten in $[0 : k-1]$, tmod in $[-k/2 : k/2-1]$. Der Ausdruck $\langle a\rangle$ interpretiert a als Binärzahl, der Ausdruck $[a]$ als Zweierkomplementzahl. Argumente: Z.B.

$$3 \bmod 4 = 3 \neq -1 = 3 \operatorname{tmod} 4,$$

und

$$\langle 1\rangle = 1 \neq -1 = [1].$$

Aufgabe 2: (2)

(a) Zeigen Sie:

$$\langle 0a\rangle = \langle a\rangle \qquad \neg\forall a.[0a] = [a]$$

$$\neg\forall a.[1a] = [a] \qquad [\mathrm{hd}(a)a] = [a]$$

Wobei für $a \in \mathbb{B}^{n+1}$,

$$\mathrm{hd}(a) = a_n.$$

(b) Wieso gilt folgendes nicht:

$$[0a] \neq [a]$$

Solution: Für $a \in \mathbb{B}^n$ gilt

$$\langle 0a \rangle = 0 \cdot 2^n + \langle a \rangle.$$

Es gelten

$$[01] = 1 \neq -1 = [1], \; [10] = -2 \neq 0 = [0].$$

Für $a \in \mathbb{B}^{n+1}$ gilt

$$[a_n a] = -a_n \cdot 2 \cdot 2^n + a_n \cdot 2^n + \langle a[n-1:0] \rangle = -a_n \cdot 2^n + \langle a[n-1:0] \rangle = [a]$$

Die obere Aussage besagt nur, dass man nicht alle Werte aus $\mathbb{B}^{n+1}$ in die Gleichung einsetzen kann. Diese Aussage besagt, dass man keine der Werte aus $\mathbb{B}^{n+1}$ in die Gleichung einsetzen kann; das ist aber Falsch, z.B.:

$$[00] = 0 = [0].$$

Aufgabe 3: (2)

Zeigen Sie:

$$-[a] = [\overline{a}] + 1 \qquad -\langle a \rangle = [1\overline{a}] + 1$$
$$-\langle a \rangle \equiv \langle \overline{a} \rangle + 1 \bmod 2^n \qquad -\langle a \rangle \neq \langle \overline{a} \rangle + 1$$

Solution: Für $a \in \mathbb{B}^{n+1}$ gilt

$$-[a] = a_n \cdot 2^n - \langle a[n-1:0] \rangle = (1 - \overline{a}_n) \cdot 2^n + \langle \overline{a}_n \rangle - \langle 1 \ldots 1 \rangle = 2^n - (2^n - 1) + [\overline{a}] = [\overline{a}] + 1$$

Mithilfe von Gleichungen aus der Vorlesung und der ersten Teilübung zeigen wir für $a \in \mathbb{B}^n$:

$$-\langle a \rangle = -[0a] = [1\overline{a}] + 1$$

Mithilfe der Gleichung aus der zweiten Teilübung zeigen wir für $a \in \mathbb{B}^n$:

$$-\langle a \rangle = -2^n + \langle \overline{a} \rangle + 1 \equiv \langle \overline{a} \rangle + 1 \bmod 2^n$$

Für die Ungleichheit

$$-\langle a \rangle \neq \langle \overline{a} \rangle + 1$$

reicht uns die Beobachtung, dass

$$-\langle a \rangle \leq 0 < 1 \leq \langle \overline{a} \rangle + 1.$$

Aufgabe 4: (2)

Zeigen Sie für $a, b \in \mathbb{B}^n$:

(a) $\langle a\rangle \geq \langle b\rangle$ genau dann wenn

$$\langle a\rangle - \langle b\rangle = (\langle a\rangle + \langle \bar{b}\rangle + 1 \bmod 2^n)$$

(b)

$$\langle a\rangle - \langle b\rangle \neq \langle a\rangle + \langle \bar{b}\rangle + 1$$

Solution:

Aufgabenteil a war zuerst falsch. Deshalb gilt auch als richtige Lösung: Widerlegen Sie: $\langle a\rangle \leq \langle b\rangle$ genau dann wenn

$$\langle a\rangle - \langle b\rangle = (\langle a\rangle + \langle \bar{b}\rangle + 1 \bmod 2^n)$$

Durch Beispiel $a = 0, b = 1$.

Zuerst $\langle a\rangle \geq \langle b\rangle \rightarrow \ldots$. Aufgrund des Billiglemmas und der vorherigen Aufgabe reicht es zu zeigen dass

$$\langle a\rangle - \langle b\rangle \in [0 : 2^n - 1],$$

und das ist bei $\langle a\rangle \geq \langle b\rangle$ offenbar der Fall.

Für die Rückrichtung reicht uns die Beobachtung dass im Falle der Gleichheit

$$\langle a\rangle - \langle b\rangle \in [0 : 2^n - 1]$$

gelten muss, und deshalb

$$\langle a\rangle \geq \langle b\rangle.$$

Die Ungleichheit ist Äquivalent zu

$$-\langle b\rangle \neq \langle \bar{b}\rangle + 1,$$

die laut der vorherigen Aufgabe nicht gilt.

Aufgabe 5: (2)

Was ist die Beziehung zwischen

$$\forall, \exists$$

und

$$\wedge, \vee$$

und

$$\cap, \cup?$$

Geben Sie informelle Gleichungen bzw. Äquivalenzen mit "..." an, die diese Beziehungen beschreiben, wie z.B., für $\sum$ und $+$

$$\sum_{i=m}^{n-1} f(i) = f(m) + \ldots + f(n-1).$$

Saarland University
Department 6.2 - Computer Science
Prof. Dr. W. J. Paul
Jonas Oberhauser

System Architecture - SS15
Exercise Sheet 2(due: May 4, 2015)

Solution:
$$\forall i.a_i \iff a_0 \wedge \ldots \wedge a_{n-1},$$
$$\exists i.a_i \iff a_0 \vee \ldots \vee a_{n-1},$$
Und entweder
$$x \in \bigcap M_i \iff \forall i.x \in M_i,$$
$$x \in \bigcup M_i \iff \exists i.x \in M_i,$$
oder
$$x \in M \cap N \iff x \in M \wedge x \in N,$$
$$x \in M \cup N \iff x \in M \vee x \in N.$$

Aufgabe 6: (2)

In der Vorlesung haben wir boolsche Ausdrücke gezeigt. Zeigen Sie dass die boolschen Ausdrücke aus der Vorlesung vollständig sind, i.e., dass alle Funktionen $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$ einen boolschen Ausdruck $e \in BE$ haben sodass für alle $a \in \mathbb{B}^n$:
$$e(a) = f(a),$$
und der selber keine Funktionen als Teilausdrücke hat, i.e.,
$$F = \{f_1, \ldots, f_r\} = \emptyset.$$

Solution: Induktion über n (Anzahl der Argumente).

Induktionsanfang. Für $n = 0$ ist $f \in \mathbb{B}^0 \to \mathbb{B}$. In diesem Raum gibt es nur die Funktionen
$$\bot(\epsilon) = 0, \top(\epsilon) = 1$$
Daher wählen wir einfach
$$e = f(\epsilon).$$
Für $n \to S(n)$ ist die Induktionshypothese dass wir alle Funktionen mit n Parametern darstellen können, und wir müssen Zeigen dass dies auch für jede Funktion $f \in \mathbb{B}^{S(n)} \to \mathbb{B}$ gilt. Wir verringern dazu die Anzahl der Parameter von f künstlich um 1, in dem wir den letzten Parameter "festhalten". Formal definieren wir die Funktionen
$$g_0, g_1 : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$$
für $a[n-1:0] \in \mathbb{B}^n$ wie folgt:
$$g_0(a[n-1:0]) = f(0a[n-1:0]),\ g_1(a[n-1:0]) = f(1a[n-1:0]).$$
Per Induktionshypothese erhalten wir boolsche Ausdrücke
$$e_0, e_1 \in BE$$

sodass

$$e_0(a[n-1:0]) = g_0(a[n-1:0]),\ e_1(a[n-1:0]) = g_1(a[n-1:0]).$$

Wir kombinieren diese wie Folgt:

$$e = e_1 \wedge x_n \vee e_0 \wedge \overline{x_n},$$

wobei wie in der Vorlesung die Variable x_n später den Wert des $S(n)$-ten Bits annehmen wird:

$$e(a[n:0]) = e_1(a[n:0]) \wedge a_n \vee e_0(a[n:0]) \wedge \overline{a_n}.$$

Da die boolschen Ausdrücke e_1, e_0 nicht x_n enthalten gilt weiterhin (Bonus wenn man das Zeigt)

$$e_1(a[n:0]) = e_1(a[n-1:0]),\ e_0(a[n:0]) = e_0(a[n-1:0]).$$

Durch Fallunterscheidung von a_n erhalten wir

- $a_n = 0$:

$$\begin{aligned} e(a) &= e_1(a[n-1:0]) \wedge 0 \vee e_0(a[n-1:0]) \wedge 1 = 0 \vee e_0(a[n-1:0]) \\ &= e_0(a[n-1:0]) \overset{IH}{=} g_0(a[n-1:0]) \overset{DEFg}{=} f(0a[n-1:0]) = f(a). \end{aligned}$$

- Der Fall $a_n = 1$ ist analog.