Saarland University
Department 6.2 - Computer Science
Prof. Dr. W. J. Paul
Jonas Oberhauser

System Architecture - SS15

Exercise Sheet 1 (due: 27.04.15)

Wichtig:

- Registrieren Sie sich unter

  http://www-wjp.cs.uni-saarland.de/lehre/vorlesung/info2/ss15/anmeldung.php

  sonst können Sie sich später nicht für unsere Klausuren anmelden.
- Sie Benötigen 50% aller Übungsblätter die für Klausur X relevant sind, um zu Klausur X zugelassen zu werden. Dieses Blatt ist Relevant für Vor- und Nachklausur.
- Das Übungsblatt muss stets am Montag nach der Vorlesung bei mir in der Office Hour oder, falls zeitgleich, in der Übungsgruppe Ihrer Tutorin abgegeben werden.
- Geben Sie stets Ihren Namen, Ihre Matr. Nr., und den Namen ihrer Tutorin auf der vordersten Seite oben rechts an.
- Sie dürfen Ergebnisse von vorherigen Aufgaben verwenden, auch wenn Sie diese nicht gelöst haben. Markieren sie Gleichungen, in denen Sie ein vorheriges Ergebniss benutzen, mit dem Kürzel E+Aufgabennummer.
- Wenn Sie sich nicht für die Klausur vorbereiten möchten, aber trotzdem zugelassen werden möchten, schreiben Sie einfach Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf die Lösung einer kompetenten Mitstudentin. Es besteht auch keine Anwesenheitspflicht in den Übungsgruppen.

Tutor: ____________________

Namen, Matr. Nummern: ____________________

Machen Sie sich keine Sorgen, wenn Sie das erste Übungsblatt als zu lang empfinden. Spätere Übungsblätter werden kürzer sein.

Exercise 1: **(1)**

Das Induktionsaxiom ist formal wie folgt: Sei $P : \mathbb{N} \to \mathbb{B}$ ein Prädikat der natürlichen Zahlen. Wenn $P(0)$, und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $P(n) \to P(S(n))$, dann gilt P für alle $n \in \mathbb{N}$.

Was bezeichnet man davon als den Induktionsanfang, den Induktsionsschritt, die Induktionshypothese?

Solution: $P(0)$ Induktionsanfang, $P(n) \to P(S(n))$ Induktionsschritt, $P(n)$ Induktionshypothese (als Teil vom Induktionsschritt).

Falsch ist: $\forall n.P(n)$ Induktionshypothese.

Exercise 2: **(2)**

Zeigen Sie durch Induktion

$$S(x) + y = S(x + y).$$

(a) Über welche Variable führen Sie Induktion und warum?

(b) Wie instantiieren Sie in diesem Fall das Prädikat P von Aufgabe 1?

(c) Führen Sie den Induktionsbeweis durch. Schreiben Sie die Induktionshypothese auf und markieren Sie die Gleichung, bei der Sie die Induktionshypothese verwendet haben, mit dem Kürzel IH.

Solution: Induktion über y da $+$ rekursiv über y.

$$P(y) = \forall x, (S(x) + y = S(x + y)).$$

Beweis $P(0)$: Für alle x,

$$S(x) + 0 \overset{DEF+}{=} S(x) \overset{DEF+}{=} S(x + 0).$$

Beweis $P(y) \rightarrow P(S(y))$: Man nehme an

$$IH : \forall x, S(x) + y = S(x + y)).$$

Zu zeigen ist $P(S(y))$, i.e., für alle x

$$S(x) + S(y) \overset{!}{=} S(x + S(y)).$$

Es gilt

$$\begin{aligned} S(x) + S(y) &\overset{DEF+}{=} S(S(x) + y) \\ &\overset{IH(x)}{=} S(S(x + y)) \\ &\overset{DEF+}{=} S(x + S(y)) \end{aligned}$$

Alternative (freies x):

$$P(y) = (S(x) + y = S(x + y))$$

Beweis $P(0)$:

$$S(x) + 0 \overset{DEF+}{=} S(x) \overset{DEF+}{=} S(x + 0).$$

Beweis $P(y) \rightarrow P(S(y))$: Man nehme an

$$IH : S(x) + y = S(x + y)).$$

Zu zeigen ist $P(S(y))$, i.e.,

$$S(x) + S(y) \overset{!}{=} S(x + S(y)).$$

Es gilt

$$\begin{aligned} S(x) + S(y) &\overset{DEF+}{=} S(S(x) + y) \\ &\overset{IH}{=} S(S(x + y)) \\ &\overset{DEF+}{=} S(x + S(y)) \end{aligned}$$

Saarland University
Department 6.2 - Computer Science
Prof. Dr. W. J. Paul
Jonas Oberhauser

System Architecture - SS15

Exercise Sheet 1 (due: 27.04.15)

Exercise 3: **(2)**

Beachten Sie folgende *endrekursive* Definition von addition:

$$plus(x, 0) = x,\ plus(x, S(y)) = plus(S(x), y).$$

Wir wollen durch Induktion zeigen dass diese Optimierung zulässig ist, d.h.,

$$plus(x, y) = x + y.$$

(a) Über welche Variable führen Sie Induktion und warum?

(b) Wie instantiieren Sie in diesem Fall das Prädikat P von Aufgabe 1?

(c) Führen Sie den Induktionsbeweis durch. Schreiben Sie die Induktionshypothese auf und markieren Sie die Gleichung, bei der Sie die Induktionshypothese verwendet haben, mit dem Kürzel IH.

Solution: Induktion über y da $+$ und *plus* rekursiv über y.

$$P(y) = \forall x, (plus(x, y) = x + y).$$

Beweis $P(0)$: Für alle x,

$$plus(x, 0) \overset{DEFplus}{=} x \overset{DEF+}{=} x + 0.$$

Beweis $P(y) \to P(S(y))$: Man nehme an

$$IH : \forall x, plus(x, y) = x + y.$$

Zu zeigen ist $P(S(y))$, i.e., für alle x

$$plus(x, S(y)) \overset{!}{=} x + S(y).$$

Es gilt

$$\begin{aligned} plus(x, S(y)) &\overset{DEFplus}{=} plus(S(x), y) \\ &\overset{IH(S(x))}{=} S(x) + y \\ &\overset{E2(x,y)}{=} S(x + y) \\ &\overset{DEF+}{=} x + S(y) \end{aligned}$$

Exercise 4: **(2)**

Beachten Sie folgende *linksrekursive* Definition der Gleichheit:

$$eq(0, y) = (y = 0),\ eq(S(x), y) = \begin{cases} eq(x, y') & y = S(y') \\ \text{false} & \text{o.w.} \end{cases}$$

Zeigen Sie durch Induktion

$$eq(x, y) \iff x = y.$$

(a) Über welche Variable führen Sie Induktion und warum?

(b) Wie instantiieren Sie in diesem Fall das Prädikat P von Aufgabe 1?

(c) Führen Sie den Induktionsbeweis durch. Schreiben Sie die Induktionshypothese auf und markieren Sie die Gleichung, bei der Sie die Induktionshypothese verwendet haben, mit dem Kürzel IH.

Solution: Induktion über x da eq rekursiv über x.

$$P(x) = \forall y, (eq(x,y) \iff x = y).$$

Beweis $P(0)$: Für alle y,

$$eq(0,y) \overset{DEFeq}{\iff} y = 0 \overset{sym=}{\iff} 0 = y.$$

Beweis $P(x) \to P(S(x))$: Man nehme an

$$IH : \forall y, eq(x,y) \iff x = y.$$

Zu zeigen ist $P(S(y))$, i.e., für alle y

$$eq(S(x),y) \overset{!}{\iff} S(x) = y.$$

Es gilt

$$eq(S(x),y) \overset{DEFeq}{\iff} \begin{cases} eq(x,y') & y = S(y') \\ \text{false} & \text{o.w.} \end{cases}$$

Fallunterscheidung $y = S(y')$ oder nicht.

- $y = S(y')$:

$$\begin{aligned} eq(S(x),y) &\overset{DEFeq}{\iff} eq(x,y') \\ &\overset{IH(y')}{\iff} x = y' \\ &\overset{Peano}{\iff} S(x) = S(y') \\ &\overset{Fall}{\iff} S(x) = y. \end{aligned}$$

- $y \neq S(y')$: Dann $y = 0$, und

$$\begin{aligned} eq(S(x),y) &\overset{DEFeq}{\iff} \text{false} \\ &\overset{Peano}{\iff} S(x) = 0 \\ &\overset{Fall}{\iff} S(x) = y. \end{aligned}$$

Exercise 5: **(1)**

Saarland University
Department 6.2 - Computer Science
Prof. Dr. W. J. Paul
Jonas Oberhauser

System Architecture - SS15

Exercise Sheet 1 (due: 27.04.15)

Sei $a \in \mathbb{B}^n$. Was ist der Unterschied zwischen a und $\langle a \rangle$? Schreiben sie für $n = 3$ vier verschiedene Elemente $a_1, \ldots, a_4$ aus $\mathbb{B}^n$ auf und Berechnen sie jeweils $\langle a_i \rangle$.

Solution: Die beiden Ausdrücke haben unterschiedliche Typen; $\langle a \rangle$ ist eine Zahl, und a ist eine Zeichenkette von Nullen und Einsen. (Elemente ausgelassen)

Exercise 6: **(2)**

Zeigen Sie, dass die Funktion $\langle \cdot \rangle$ injektiv (also eindeutig) ist. Für $a, b \in \mathbb{B}^n$:

$$a \neq b \to \langle a \rangle \neq \langle b \rangle.$$

Solution: Induktion über n. Für $n = 0$ gilt $a = b = \epsilon$ und wir sind fertig.

Für $n \to S(n)$ gilt $a_n \neq b_n$ oder $a_n = b_n$ und $a[n-1:0] \neq b[n-1:0]$.

- $a_n \neq b_n$: W.L.O.G. ist $a_n = 0$ und $b_n = 1$, und damit
$$\langle a \rangle \leq 2^n - 1 < 2^n \leq \langle b \rangle.$$
- $a_n = b_n$ und $a[n-1:0] \neq b[n-1:0]$: Per Induktionshypothese sind $\langle a[n-1:0] \rangle \neq \langle b[n-1:0] \rangle$, und damit
$$\langle a \rangle \overset{DEF\langle\cdot\rangle}{=} a_n \cdot 2^n + \langle a[n-1:0] \rangle \overset{IH}{\neq} a_n \cdot 2^n + \langle b[n-1:0] \rangle \overset{a_n = b_n}{=} b_n \cdot 2^n + \langle b[n-1:0] \rangle \overset{DEF\langle\cdot\rangle}{=} \langle b \rangle.$$

Exercise 7: **(2)**

Beachten Sie folgende Definition der Summation:

$$\sum_{i=0}^{0-1} f(i) = 0, \quad \sum_{i=0}^{S(n)-1} f(i) = f(n) + \sum_{i=0}^{n-1} f(i).$$

(a) Definieren Sie eine Summation ohne das lästige -1 Symbol:
$$\sum_{i=0}^{n} f(i).$$

(b) Definieren Sie eine allgemeine Summation, i.e., für $m \leq n$
$$\overline{\sum}_{i=m}^{n-1} f(i) \text{“=”} f(m) + \ldots + f(n-1),$$
und zeigen Sie dass ihre Definition für $m = 0$ mit der Vorherigen übereinstimmt:
$$\overline{\sum}_{i=0}^{n-1} f(i) = \sum_{i=0}^{n-1},$$
und sie deshalb den waagerechten Strich auch weglassen können. Hinweis: $m \leq n$ genau wenn es ein $z \in \mathbb{N}$ gibt sodass $m + z = n$.

(c) Zeigen Sie für $m \leq n \leq u$ und ihre vorherige Definition (der waagerechte Strich ist wie oben beschrieben weggelassen):

$$\sum_{i=m}^{n-1} f(i) + \sum_{i=n}^{u-1} f(i) = \sum_{i=m}^{u-1} f(i).$$

Falls ihnen Induktion Freude bereitet, oder wenn Sie noch Verständnissprobleme bezgl. Induktion haben, besuchen Sie auf jeden Fall die Vorlesung "Introduction to Computational Logic" von Prof. Smolka.

Solution:

$$\sum_{i=0}^{n} f(i) = \sum_{i=0}^{S(n)-1} f(i).$$

Sei nun $n = m + z$.

$$\overline{\sum}_{i=m}^{n-1} f(i) = \sum_{i=0}^{z-1} f(i+m).$$

Per definition gilt für $m = 0$ dass $n = z$ und

$$\overline{\sum}_{i=m}^{n-1} f(i) = \sum_{i=0}^{z-1} f(i+0) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i).$$

Sei nun $n = m + x$ und $u = n + y = m + x + y = m + (x + y)$. Wir zeigen per Induktion über y

$$\sum_{i=m}^{n-1} f(i) + \sum_{i=n}^{u-1} f(i) \stackrel{!}{=} \sum_{i=m}^{u-1} f(i).$$

Nach entfalten der Definitionen und Substitution erhalten wir

$$\sum_{i=0}^{x-1} f(i+m) + \sum_{i=0}^{y-1} f(i+m+x) \stackrel{!}{=} \sum_{i=0}^{x+y-1} f(i+m).$$

Sei $y = 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{x-1} f(i+m) + \sum_{i=0}^{y-1} f(i+m+x) &= \sum_{i=0}^{x-1} f(i+m) + \sum_{i=0}^{0-1} f(i+m+x) \\
&= \sum_{i=0}^{x-1} f(i+m) + 0 = \sum_{i=0}^{x-1} f(i+m) \\
&= \sum_{i=0}^{x+0-1} f(i+m) \sum_{i=0}^{x+y-1} f(i+m).
\end{aligned}$$

Wir gehen nun von y nach $S(y)$. Sei

$$IH : \sum_{i=0}^{x-1} f(i+m) + \sum_{i=0}^{y-1} f(i+m+x) = \sum_{i=0}^{x+y-1} f(i+m),$$

und wir müssen Zeigen

$$\sum_{i=0}^{x-1} f(i+m) + \sum_{i=0}^{S(y)-1} f(i+m+x) \stackrel{!}{=} \sum_{i=0}^{x+S(y)-1} f(i+m)$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{x-1} f(i+m) + \sum_{i=0}^{S(y)-1} f(i+m+x) &= \sum_{i=0}^{x-1} f(i+m) + (\sum_{i=0}^{y-1} f(i+m+x) + f(y+m+x)) \\
&= (\sum_{i=0}^{x-1} f(i+m) + \sum_{i=0}^{y-1} f(i+m+x)) + f(y+m+x) \\
&\stackrel{!}{=} \sum_{i=0}^{x+y-1} f(i+m) + f(y+m+x) \\
&= \sum_{i=0}^{x+y-1} f(i+m) + f(x+y+m) \\
&= \sum_{i=0}^{S(x+y)-1} f(i+m) = \sum_{i=0}^{x+S(y)-1} f(i+m).
\end{aligned}$$

Exercise 8: (3)

Zeigen Sie das Dekompositionslemma.

(a) (2 points) Zeigen Sie für $m, n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{B}^n$ und $b \in \mathbb{B}^m$,

$$\langle ab \rangle = \langle a \rangle \cdot 2^m + \langle b \rangle.$$

(b) (1 point) Zeigen Sie für $m \leq n$ und $a \in \mathbb{B}^n$, dass

$$\langle a \rangle = \langle a[n-1:m] \rangle \cdot 2^m + \langle a[m-1:0] \rangle.$$

Solution: Wir zeigen

$$\langle ab \rangle \stackrel{!}{=} \langle a \rangle \cdot 2^m + \langle b \rangle,$$

von dem das Dekompositionslemma ein Spezialfall ist.

$$\begin{aligned}
\langle ab\rangle &= \sum_{i=0}^{m+n-1} (ab)_i 2^i \\
&\overset{E7}{=} \sum_{i=0}^{m-1} (ab)_i \cdot 2^i + \sum_{i=m}^{m+n-1} (ab)_i \cdot 2^i \\
&= \sum_{i=0}^{m-1} (ab)_i \cdot 2^i + \sum_{i=0}^{n-1} (ab)_{m+i} \cdot 2^{m+i} \\
&= \sum_{i=0}^{m-1} (ab)_i \cdot 2^i + 2^m \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (ab)_{m+i} \cdot 2^i \\
&= \sum_{i=0}^{m-1} b_i \cdot 2^i + 2^m \cdot \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot 2^i \\
&= \langle b\rangle + 2^m \cdot \langle a\rangle \\
&= \langle a\rangle \cdot 2^m + \langle b\rangle .
\end{aligned}$$

Exercise 9: **(1)**

Seien $x, y \in \mathbb{Z}$ und $k \in \mathbb{N}$. Erklären Sie den Unterschied zwischen

$$x = y \bmod k, \;\; x \equiv y \bmod k,$$

und geben Sie ein Beispiel bei dem

$$x \equiv y \bmod k,$$

aber

$$x \neq y \bmod k.$$

Warum gibt es kein Beispiel dieser Art für die andere Richtung?

Solution: Die Aussage $x = y \bmod k$ ist die Gleichheit von zwei Zahlen: x, und dem Standardrepräsentanten modulo k von y. Die Aussage $x \equiv y \bmod k$ sagt aus, dass x und y kongruent sind (modulo k).

Zum beispiel sind 4 und 1 kongruent modulo 3,

$$4 \equiv 1 \bmod 3,$$

aber 4 ist nicht der Standardrepräsentant von 1:

$$4 \neq 1 \bmod 3.$$

Da der Standardrepräsentant per Definition modulokongruent ist, gilt

$$y \equiv (y \bmod k) \bmod k.$$