



8. Übungsblatt Informatik II

(Abgabe: 20.06.2003)

1. Aufgabe: (Parallel Prefix)

(5 + 3 Punkte)

- (a) Bringe die Kostenformel des n -bit Parallel Prefix Schaltkreises ($n = 2^k$) vom letzten Übungsblatt in eine geschlossene Form. Zur Erinnerung:

$$C(PP_o(1)) = 0, C(PP_o(n)) = C(PP_o(n/2)) + (n - 1) \cdot C(o).$$

- (b) Bringe die Tiefenformel in eine geschlossene Form. Zur Erinnerung:

$$D(PP_o(1)) = 0, D(PP_o(n)) = D(PP_o(n/2)) + 2 \cdot D(o).$$

2. Aufgabe: (Carry Lookahead Addierer)

Die bisherigen Addierer waren entweder langsam und günstig (Carry Chain Addierer mit Tiefe $O(n)$ und Kosten $O(n)$) oder schnell und teuer (Conditional Sum Addierer mit Tiefe $O(\log n)$ und Kosten $O(n^{\log 3})$). Wir konstruieren nun einen Addierer mit Tiefe $O(\log n)$ und Kosten $O(n)$.

Seien c_i für $-1 \leq i \leq n - 1$ die bei der Addition $\langle a \rangle + \langle b \rangle$ auftretenden Carrybits.

Def.: Für $a, b \in \{0, 1\}^n$; $i \leq j \leq n - 1$ definiere

$$p_{j,i} = 1 \Leftrightarrow \langle a[j : i] \rangle + \langle b[j : i] \rangle = \langle 1^{j-i+1} \rangle$$

Def.: Für $a, b \in \{0, 1\}^n$; $0 < i \leq j \leq n - 1$ definiere

$$g_{j,i} = 1 \Leftrightarrow \langle a[j : i] \rangle + \langle b[j : i] \rangle > \langle 1^{j-i+1} \rangle$$

Def.: Für $a, b \in \{0, 1\}^n$; $c_{-1} \in \{0, 1\}$; $j \leq n - 1$ definiere

$$g_{j,0} = 1 \Leftrightarrow \langle a[j : 0] \rangle + \langle b[j : 0] \rangle + c_{-1} > \langle 1^{j+1} \rangle$$

(a) 3 Punkte

Beweise: $p_{j,i} = 1 \Rightarrow c_j = c_{i-1}$. Man sagt, die Bits i bis j **propagieren** den Übertrag.

(b) 2 Punkte

Beweise: $g_{j,i} = 1 \Rightarrow c_j = 1$. Man sagt, die Bits i bis j **generieren** einen Übertrag.

(c) 2 Punkte

Konstruiere einen Schaltkreis mit Eingängen $a_i, b_i \in \{0, 1\}$ und Ausgängen $p_{i,i}, g_{i,i} \in \{0, 1\}$ für $i > 0$ wie oben definiert. Die Kosten dürfen max. 2, die Tiefe max. 1 betragen.

(d) 3 Punkte

Konstruiere einen Schaltkreis mit Eingängen $a_0, b_0, c_{-1} \in \{0, 1\}$ und Ausgängen $p_{0,0}, g_{0,0} \in \{0, 1\}$ wie oben definiert. Die Kosten dürfen max. 4, die Tiefe max. 3 betragen.

(e) 4 Punkte

Seien $g_2 = g_{j,k}$, $p_2 = p_{j,k}$, $g_1 = g_{k-1,i}$, $p_1 = p_{k-1,i}$ mit $i < k \leq j$. Beweise:

$$g_{j,i} = g_2 \vee (g_1 \wedge p_2), p_{j,i} = p_2 \wedge p_1.$$

(f) 4 Punkte

Betrachte die Funktion $\circ : \{0, 1\}^2 \times \{0, 1\}^2 \rightarrow \{0, 1\}^2$ mit

$$(g_2, p_2) \circ (g_1, p_1) := (g_2 \vee (g_1 \wedge p_2), p_2 \wedge p_1). \text{ Beweise: } \circ \text{ ist assoziativ.}$$

(g) 4 Punkte

Beweise: $g_{i,0} = c_i$ für $0 \leq i \leq n - 1$.

(h) 2 Punkte

Beweise: Sind alle Carrybits c_i der Addition $\langle a \rangle + \langle b \rangle$ bekannt, so kann man die Summe $\langle a \rangle + \langle b \rangle$ mit Kosten $2 \cdot n$ und Tiefe 2 berechnen.



8. Übungsblatt Informatik II

(Abgabe: 20.06.2003)

Nun geht man wie folgt vor: Aus (f) folgt, dass man die $(g_{i,0}, p_{i,0})$ mit Hilfe des auf Blatt 7 eingeführten Parallel Prefix Schaltkreise berechnen kann. Aus (g) und (h) folgt, dass man mit zusätzlichen linearen Kosten und konstanter Tiefe aus diesem PP_o -Schaltkreis einen Addierer bauen kann. Diesen Addierer nennt man n-bit Carry Lookahead Addierer (CLA_n).

(i) **4 Punkte**

Zeichne die fertige Konstruktion eines CLA_n unter Benutzung eines $PP_o(n)$.

(j) **2 Punkte**

Bestimme die Kosten des CLA_n in geschlossener Form.

(k) **2 Punkte**

Bestimme die Tiefe des CLA_n in geschlossener Form.

3. * **Aufgabe: (Unär-/ Binär-Codierung) (10 Punkte *)**

Sei $x \in \{0, 1\}^{32}$, $x_i = 1$ für genau ein $i \in \{0, \dots, 31\}$. Betrachte den Decoder aus der Vorlesung und den Encoder aus Blatt 7, Aufgabe 5. Wie teuer muß ein FlipFlop sein, damit es sich lohnt, x zu encoden, binär abzuspeichern und danach wieder zu decoden statt es unär abzuspeichern?

Hinweise zur Klausur:

- Um zur Klausur zugelassen zu sein, müßt ihr bis einschließlich 20.06.2003 mindestens einmal in einer Übungsgruppe vorgerechnet haben. Unter <http://www-wjp.cs.uni-sb.de/lehre/vorlesung/info2/gruppen.php> findet ihr eine vorläufige Zulassungsliste. Wer dort am 21.06.2003 nicht als zugelassen aufgeführt ist darf nicht mitschreiben.
- Zur Klausur mitzubringen sind:
 - ein Stapel LEERE Blätter sowie funktionsfähiges Schreib- und Zeichengerät.
 - euer gültiger Studentenausweis sowie ein ebenfalls gültiger Lichtbildausweis.
- Zur Klausur definitiv NICHT mitzubringen sind:
 - Bücher, Vorlesungsmitschriften sowie sonstige fachbezogene Hilfsmittel.
 - Handys.
- Klausurrelevanter Stoff ist:
 - der in der Vorlesung behandelte Stoff bis einschließlich 18.06.2003.
 - der Inhalt der Übungsblätter bis einschließlich Blatt 8 ohne die *-Aufgaben.
- Die Klausur findet um 9 Uhr st. in den Hörsälen im Gebäude 45 (Informatik) statt. Die Zuordnung Student \rightarrow Hörsaal wird an den Türen ausgehängt. Bitte seid dementsprechend früh da, um in Ruhe euren Platz einnehmen zu können ohne die anderen zu stören.